

Решения заданий из книги

Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2017.

40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года.

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова,

издательства Легион.

Решение варианта 2

$$21. \frac{48^{n+5}}{4^{2n+9} \cdot 3^{n+4}} = \frac{(16 \cdot 3)^{n+5}}{4^{2n+9} \cdot 3^{n+4}} = \frac{16^{n+5} \cdot 3^{n+5}}{4^{2n+9} \cdot 3^{n+4}} = \frac{(4^2)^{n+5} \cdot 3^{n+5}}{4^{2n+9} \cdot 3^{n+4}} =$$

$$= 4^{2n+10-(2n+9)} \cdot 3^{n+5-(n+4)} = 4^{2n+10-2n-9} \cdot 3^{n+5-n-4} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

22. Пусть 17%-го раствора взяли V литров, тогда из условия следует, что 35%-го раствора взяли также V литров. В первом растворе объём растворяемого вещества составляет $\frac{17}{100}V$, а во втором растворе — $\frac{35}{100}V$. Суммарный объём этого вещества равен

$$\frac{17+35}{100}V = 0,52V, \text{ а объём получившегося в результате смешивания раствора равен}$$

$V + V = 2V$. Значит, искомая концентрация равна $\frac{0,52V}{2V} = 0,26 = 26\%$.

Ответ: 26.

23. Найдём корни уравнения $x^2 - 10x + 9 = 0$, $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-9} = 5 \pm 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 9$. Тогда $x^2 - 10x + 9 = (x-1)(x-9)$. Исходная функция примет вид $y = \frac{(x-7)(x-1)(x-9)}{x-9} = (x-7)(x-1) = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$ при $x \neq 9$. Построим

график функции. Графиком этой функции является парабола $y = (x-4)^2 - 9$ с выколотой точкой $(9; 16)$ и вершиной в точке $(4; -9)$ (см. рис. 1). Горизонтальная прямая $y = t$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $t = -9$ и $t = 16$.

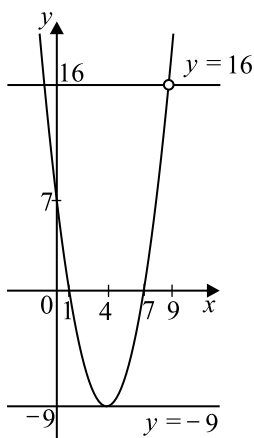


Рис. 1

Ответ: $-9; 16$.

24. По условию BM — медиана, значит, $AM = MC$, следовательно, $MC = 5$ (см. рис. 2). Рассмотрим прямоугольный треугольник CBM , в котором BM является гипотенузой. Тогда по теореме Пифагора $BM = \sqrt{CM^2 + CB^2}$. $BM = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

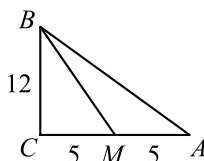


Рис. 2

Ответ: 13.

25. Воспользуемся вторым признаком подобия треугольников: $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC , а $AC : AB = DC : AC$, так как $AC : AB = 30 : 12 = 2,5$, $DC : AC = 75 : 30 = 2,5$ (см. рис. 3). Значит, треугольники ABC и ACD подобны, так как у них есть равные углы и стороны, заключающие эти углы, пропорциональны. Что и требовалось доказать.

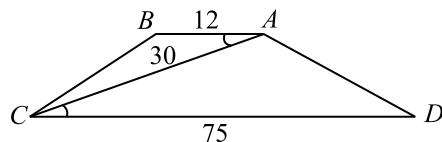


Рис. 3

26. В соответствии с условием делаем рисунок 4.

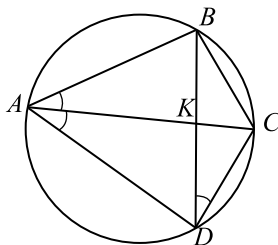


Рис. 4

Из равенства углов BAC и CAD вытекает, что дуга BC равна дуге CD , значит, равны и хорды BC и CD . Поэтому находим длину хорды CD .

Треугольники ACD и KCD подобны. У них угол ACD общий, а угол CAD равен углу KDC , так как они опираются на равные дуги.

Из подобия следует, что $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{KC}$. Значит, $CD^2 = AC \cdot KC$, $CD = \sqrt{AC \cdot KC}$.

$$AC = AK + KC = 24 + 3 = 27, CD = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9.$$

Ответ: 9.

Решение варианта 3

$$21. \frac{(2x)^3 \cdot x^{-10}}{x^{-11} \cdot 16x^4} = \frac{2^3 \cdot x^3 \cdot x^{-10}}{x^{-11} \cdot 16x^4} = \frac{8x^{3-10}}{16x^{-11+4}} = \frac{8x^{-7}}{16x^{-7}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

22. Пусть 19%-го раствора взяли V литров, тогда из условия следует, что 79%-го раствора взяли также V литров. В первом растворе объём растворяемого вещества составляет $\frac{19}{100}V$, а во втором растворе — $\frac{79}{100}V$. Суммарный объём этого вещества равен

$$\frac{19 + 79}{100}V = 0,98V, \text{ а объём получившегося в результате смешивания раствора равен}$$

$$V + V = 2V. \text{ Значит, искомая концентрация равна } \frac{0,98V}{2V} = 0,49 = 49\%.$$

Ответ: 49.

23. Найдём корни уравнения $x^2 + 9x + 20 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2}, x_1 = -5, x_2 = -4.$$

Тогда $x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 2 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Тогда $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Найдём корни уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}, x_1 = -4, x_2 = 1.$$

Тогда $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$.

Исходная функция примет вид

$$y = \frac{(x + 4)(x + 5)(x - 1)(x - 2)}{(x + 4)(x - 1)} = (x + 5)(x - 2) \text{ при } x \neq -4; x \neq 1.$$

Графиком функции $y = (x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины расположена посередине между корнями, то есть равна $\frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2}$. Тогда ордината вершины равна $\left(-\frac{3}{2} + 5\right)\left(-\frac{3}{2} - 2\right) = -\frac{49}{4} = -12,25$.

График исходной функции получается из графика функции $y = (x + 5)(x - 2)$ путём выкалывания точек с абсциссами $x = -4$ и $x = 1$. Найдём ординаты выкалываемых точек: $y(-4) = (-4 + 5)(-4 - 2) = -6$ и $y(1) = (1 + 5)(1 - 2) = -6$. Построим график исходной функции (см. рис. 5).

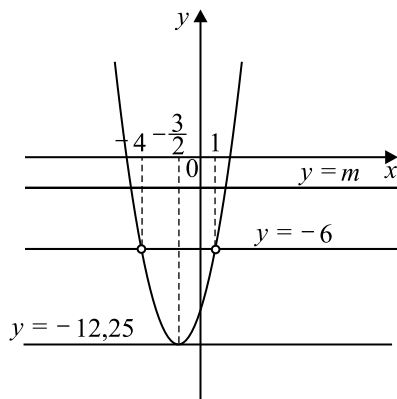


Рис. 5

Горизонтальная прямая $y = t$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $t = -12,25$.

Ответ: $-12,25$

24. По условию CM — медиана, значит, $AM = MB$, следовательно, $MB = 24$ (см. рис. 6). Рассмотрим прямоугольный треугольник CBM , в котором CM является гипотенузой. По теореме Пифагора $CM = \sqrt{BM^2 + CB^2}$. $CM = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

Ответ: 25.

25. Пусть D — середина стороны MN , тогда CK и MD равны и параллельны, значит, $CKMD$ — параллелограмм, и отрезок $CD \parallel KM$ (см. рис. 7).

По условию $CM = CN$, то есть треугольник CMN равнобедренный и медиана CD является в нём высотой, $\angle CDM = 90^\circ$. $CD \parallel KM \parallel PN$, следовательно,

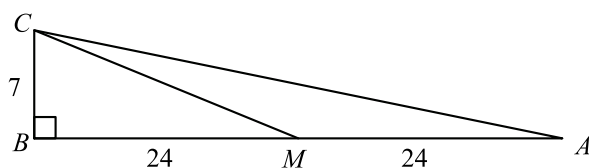


Рис. 6

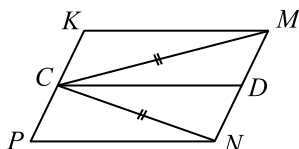


Рис. 7

$\angle PNM = \angle CDM = 90^\circ$. Отсюда, все углы параллелограмма $PKMN$ прямые, следовательно, он является прямоугольником. Что и требовалось доказать.

26. Через вершину B меньшего основания трапеции $ABCD$, лежащую на одной диагонали, проведём прямую, параллельную другой диагонали, до пересечения с большим основанием (см. рис. 8). Точку пересечения с большим основанием обозначим через K .

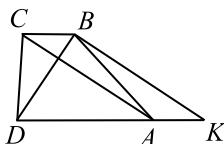


Рис. 8

По условию $DB = 8$ и $CA = 15$. Тогда $BK = CA = 15$ и $AK = BC$. Так как $DK = DA + AK = DA + BC$, то DK является суммой оснований трапеции, которая в два раза больше средней линии трапеции.

Но средняя линия трапеции равна $8,5$, поэтому $DK = 17$. Замечаем, что стороны треугольника DBK равны $8, 15$ и 17 и $8^2 + 15^2 = 17^2$, поэтому треугольник DBK — прямоугольный с прямым углом B .

Получаем, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, поэтому её площадь равна половине произведения этих диагоналей. $S_{ABCD} = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60$.

Ответ: 60.

Решение варианта 4

$$21. \frac{(3x)^4 \cdot x^{-7}}{x^{-8} \cdot 27x^5} = \frac{3^4 \cdot x^4 \cdot x^{-7}}{x^{-8} \cdot 27x^5} = \frac{81x^{4-7}}{27x^{-8+5}} = \frac{81x^{-3}}{27x^{-3}} = 3.$$

Ответ: 3.

22. Пусть 1% -го раствора взяли V литров, тогда из условия следует, что 23% -го раствора взяли также V литров. В первом растворе объём растворяемого вещества составляет $\frac{1}{100}V$, а во втором растворе — $\frac{23}{100}V$. Суммарный объём этого вещества равен $\frac{1+23}{100}V = 0,24V$, а объём получившегося в результате смешивания раствора равен

$V + V = 2V$. Значит, искомая концентрация равна $\frac{0,24V}{2V} = 0,12 = 12\%$.

Ответ: 12.

23. Заметим, что $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 10x + 21 = 0$, $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 21} = 5 \pm 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 7$. Тогда $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$,
 $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Тогда $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Отсюда исходная функция примет вид
 $y = \frac{(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x - 7)}{(x - 2)(x - 3)} = (x + 2)(x - 7)$ при $x \neq 2$; $x \neq 3$.

Графиком функции $y = (x + 2)(x - 7) = x^2 - 5x - 14$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины расположена посередине между корнями, то есть равна $\frac{-2 + 7}{2} = \frac{5}{2}$. Тогда ордината вершины равна $\left(\frac{5}{2} + 2\right)\left(\frac{5}{2} - 7\right) = -\frac{81}{4} = -20,25$.

График исходной функции получается из графика функции $y = (x + 2)(x - 7)$ путём выкалывания точек с абсциссами $x = 2$ и $x = 3$. Найдём ординаты выкалываемых точек: $y(2) = (2 + 2)(2 - 7) = -20$ и $y(3) = (3 + 2)(3 - 7) = -20$. Построим график исходной функции (см. рис. 9).

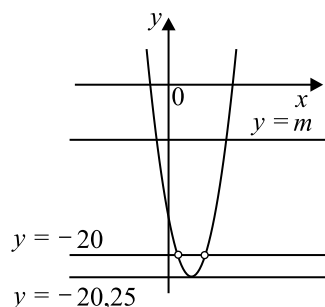


Рис. 9

Горизонтальная прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $m = -20,25$.

Ответ: $-20,25$

24. По условию AM — медиана, значит, $BM = MC$, следовательно, $MC = 7$ (см. рис. 10). Рассмотрим прямоугольный треугольник $СAM$, в котором AM является гипотенузой. Тогда по теореме Пифагора $AM = \sqrt{CM^2 + CA^2}$. $AM = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$.

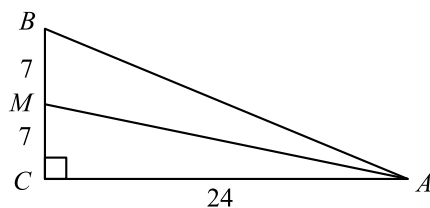


Рис. 10

Ответ: 25.

25. Пусть K — середина стороны AB , тогда CS и BK равны и параллельны, значит, $CBKS$ — параллелограмм и тогда $CB \parallel SK$ (см. рис. 11).

По условию $SA = SB$, то есть треугольник ASB равнобедренный и медиана SK является в нём высотой, $\angle SKB = 90^\circ$. $CB \parallel SK \parallel RA$, следовательно, $\angle RAB = \angle SKB = 90^\circ$.

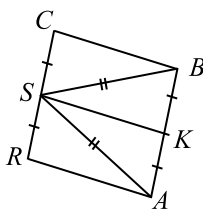


Рис. 11

Отсюда все углы ромба $ABCR$ прямые, следовательно, он является квадратом. Что и требовалось доказать.

26. Через вершину B меньшего основания трапеции $ABCD$, лежащую на одной диагонали, проведём прямую, параллельную другой диагонали, до пересечения с бóльшим основанием (см. рис. 12). Точку пересечения с бóльшим основанием обозначим через K .

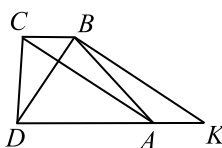


Рис. 12

Пусть в соответствии с условием $DB = 10$ и $CA = 24$. Тогда $BK = CA = 24$ и $AK = BC$. Так как $DK = DA + AK = DA + BC$, то DK является суммой оснований трапеции, которая в два раза больше средней линии трапеции.

Но средняя линия трапеции равна 13, поэтому $DK = 26$. Замечаем, что стороны треугольника DBK равны 10, 24, 26 и $10^2 + 24^2 = 26^2$, поэтому треугольник DBK — прямоугольный с прямым углом B .

Получаем, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, поэтому её площадь равна половине произведения этих диагоналей. $S_{ABCD} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$.

Ответ: 120.

Решение варианта 6

21. $\frac{5}{x^2} - \frac{7}{x} + 2 = 0, x \neq 0$.

$$2x^2 - 7x + 5 = 0.$$

$$a = 2, b = -7, c = 5.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9, \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3.$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2 \cdot 2}, x_1 = \frac{7+3}{4} = 2,5, x_2 = \frac{7-3}{4} = 1.$$

$x = 1$ и $x = 2,5$ удовлетворяют условию $x \neq 0$, следовательно, числа 1 и 2,5 — корни исходного уравнения.

Ответ: 1; 2,5.

22. За первые 2 часа автомобиль проехал $2 \cdot 90 = 180$ (км). За следующие 3 часа — $3 \cdot 65 = 195$ (км). За последний час было преодолено 45 км. Всего автомобиль был в пути

$2 + 3 + 1 = 6$ (часов) и проехал $180 + 195 + 45 = 420$ (км). Таким образом, средняя скорость равна $\frac{420}{6} = 70$ (км/ч).

Ответ: 70 км/ч.

23. Заметим, что при $x \neq 0, x \neq 5$ $y = -2 - \frac{x-5}{x^2-5x} = -2 - \frac{x-5}{x(x-5)} =$

$= -2 - \frac{1}{x}$. Таким образом, график исходной функции получается из графика функции

$y = -2 - \frac{1}{x}$ выкалыванием точки с абсциссой $x = 5$, то есть точки $(5; -2,2)$. График

функции $y = -2 - \frac{1}{x}$ — это гипербола $y = -\frac{1}{x}$, смещённая на 2 единицы вниз. Построим искомый график (см. рис. 13) и определим, что горизонтальная прямая $y = t$ не имеет с ним ни одной общей точки при $t = -2$ и $t = -2,2$.

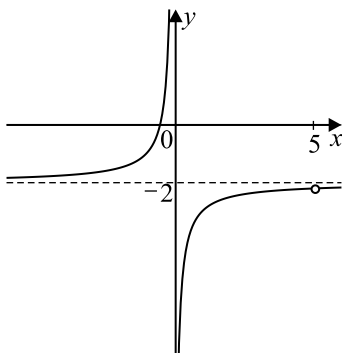


Рис. 13

Ответ: $-2; -2,2$.

24. $\triangle AMB \sim \triangle CMD$ по двум углам (см. рис. 14). Действительно, выполняется $\angle BAM = \angle CDM$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AD ; $\angle ABC = \angle BCD$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BC .

Тогда $\frac{CD}{AB} = \frac{MD}{AM}$ или $\frac{51}{AB} = \frac{34}{68}$, откуда $AB = 102$.

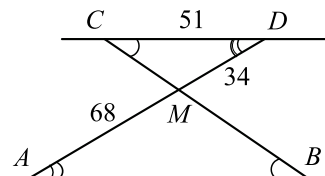


Рис. 14

Ответ: 102.

25. В прямоугольнике $BCNM$ стороны $BM \parallel CN$ (см. рис. 15). Рассмотрим секущие CA и NA . Накрест лежащие углы равны, то есть $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 4 = \angle 6$. CA и NA — биссектрисы углов C и N , значит, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 4 = \angle 5$.

Получаем $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 6$, поэтому треугольники CBA и AMN равнобедренные, при этом $CB = BA$ и $AM = MN$. Но $CB = MN$ как противоположные стороны прямоугольника, значит, $BA = MA$, то есть A — середина BM .

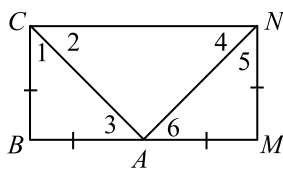


Рис. 15

26. По условию AD является хордой окружности, проходящей через её центр, значит, AD является диаметром этой окружности. Рассмотрим рисунок 16.

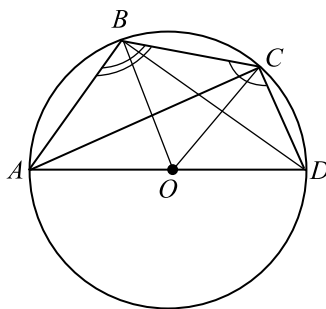


Рис. 16

Так как вписанный угол BCD равен 125° , то градусная мера дуги BAD равна 250° , а градусная мера дуги AB получается вычитанием 180° от градусной меры дуги BAD . Поэтому градусная мера дуги AB равна 70° .

Аналогично, градусная мера дуги CD равна 50° . Следовательно, градусная мера дуги BC равна $180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

Треугольник BOC является равнобедренным, и угол $BOC = 60^\circ$, так как он центральный угол в окружности и опирается на дугу в 60° . Значит, треугольник BOC равносторонний и $BO = BC = 8$. Но $AO = BO$.

Следовательно, $AD = 2AO = 2BC = 16$.

Ответ: 16.

Решение варианта 7

$$21. \frac{6}{x^2 - 4} + \frac{3}{x + 2} + 1 = 0, x^2 - 4 \neq 0.$$

$$x^2 - 4 + 3(x - 2) + 6 = 0,$$

$$x^2 - 4 + 3x - 6 + 6 = 0,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

$$a = 1, b = 3, c = -4.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25, \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5.$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{2 \cdot 1}, x_1 = \frac{-3 - 5}{2} = -4, x_2 = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

При $x = -4$ и $x = 1$ значение выражения $x^2 - 4$ отличается от нуля, следовательно, числа -4 и 1 — корни исходного уравнения.

Ответ: $-4; 1$.

22. Первые 300 км автомобиль преодолел за $\frac{300}{60} = 5$ (часов), следующие 150 км — за $\frac{150}{50} = 3$ (часа), последние 140 км — за $\frac{140}{70} = 2$ (часа). Таким образом автомобиль был в пути $5 + 3 + 2 = 10$ (часов) и проехал $300 + 150 + 140 = 590$ (км). Следовательно, его средняя скорость равна $\frac{590}{10} = 59$ км/ч.

Ответ: 59 (км/ч).

23. Заметим, что при $x \neq 0, x \neq -5$

$y = 4 + \frac{2x + 10}{x^2 + 5x} = 4 + \frac{2(x + 5)}{x(x + 5)} = 4 + \frac{2}{x}$. Таким образом, график исходной функции

получается из графика функции $y = 4 + \frac{2}{x}$ выкалыванием точки с абсциссой $x = -5$, то

есть точки $(-5; 3,6)$. График функции $y = 4 + \frac{2}{x}$ — это гипербола $y = \frac{2}{x}$, смещённая на 4 единицы вверх. Построим искомый график (см. рис. 17) и определим, что горизонтальная прямая $y = t$ не имеет с ним ни одной общей точки при $t = 3,6$ и $t = 4$.

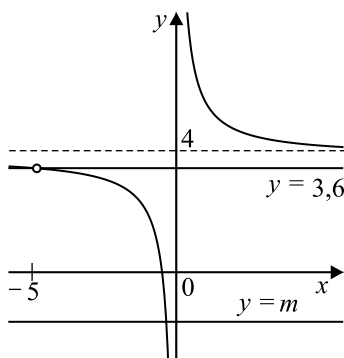


Рис. 17

При остальных значениях t общая точка будет единственной. Искомые значения t принадлежат множеству $(-\infty; 3,6) \cup (3,6; 4) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 3,6) \cup (3,6; 4) \cup (4; +\infty)$.

24. Пусть $MB = x$, тогда $DM = 72 - x$ (см. рис. 18).

$\triangle AMB \sim \triangle CMD$ по двум углам. Действительно, $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC ; $\angle ABD = \angle BDC$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BD .

Тогда $\frac{CD}{AB} = \frac{MD}{MB}, \frac{75}{15} = \frac{72 - x}{x},$

$\frac{5}{1} = \frac{72 - x}{x}, 72 - x = 5x, 6x = 72, x = 12.$ Итак, $MB = 12.$

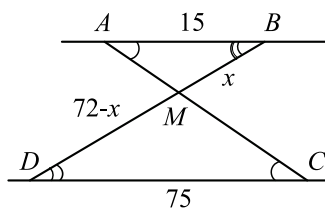


Рис. 18

Ответ: 12.

25. По условию $CE : BE = 2 : 3$, значит, $BE = 1,5EC$, $BC = 2,5EC$. В параллелограмме $ABCD$ противоположные стороны равны и параллельны, поэтому $AD = BC = 2,5EC$, $AB = CD$, $BC \parallel AD$.

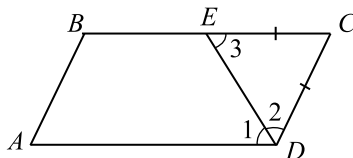


Рис. 19

Рассмотрим секущую DE . Накрест лежащие углы равны, то есть $\angle 1 = \angle 3$. DE — биссектриса угла D , значит, $\angle 1 = \angle 2$. Получаем $\angle 2 = \angle 3$, поэтому треугольник CDE равнобедренный, при этом $DC = EC$. Но $DC = AB$, значит, $DC + AB = 2AB$. Также $AD = BC = 2,5EC = 2,5AB$, значит, $AD + BC = 2 \cdot 2,5AB = 5AB$ и периметр параллелограмма $ABCD$ равен $7AB$.

26. Рассмотрим рисунок 20, на котором основание H высоты, опущенной из вершины B на прямую AC , лежит вне отрезка AC .

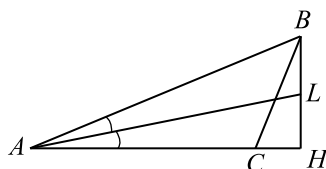


Рис. 20

Пусть AL — биссектриса угла A . По свойству биссектрисы $\frac{AB}{AH} = \frac{BL}{LH} = \frac{13}{12}$, поэтому

$$AB = \frac{13}{12}AH.$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме Пифагора } BH^2 &= AB^2 - AH^2, BH^2 = \left(\frac{13}{12}AH\right)^2 - AH^2 = \\ &= \frac{169AH^2 - 144AH^2}{144} = \frac{25AH^2}{144}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } BH = \frac{5}{12}AH \text{ и } \sin \angle A = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{5}{12}AH}{\frac{13}{12}AH} = \frac{5}{13}.$$

По теореме синусов $2R = \frac{BC}{\sin \angle A}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} = \frac{15}{2 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{15 \cdot 13}{2 \cdot 5} = 19,5.$$

Ответ: 19,5.

Замечание. Решение задачи не изменяется, если вершина B проектируется на сторону AC или в точку C .

Решение варианта 8

$$21. 2 - \frac{12}{x^2 - 9} - \frac{2}{x + 3} = 0, x^2 - 9 \neq 0.$$

$$2(x^2 - 9) - 12 - 2(x - 3) = 0,$$

$$2x^2 - 18 - 12 - 2x + 6 = 0,$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0,$$

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

По формулам Виета, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -12$. Получим $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

При $x = -3$ $x^2 - 9 = 0$, следовательно, число -3 не является корнем исходного уравнения.

При $x = 4$ $x^2 - 9 \neq 0$, следовательно, число 4 — корень исходного уравнения.

Ответ: 4.

22. Первые 90 км автомобиль преодолел за $\frac{90}{45} = 2$ (часа), следующие 320 км — за

$\frac{320}{80} = 4$ (часа), последние 150 км — за $\frac{150}{75} = 2$ (часа). Таким образом, автомобиль был в

пути $2 + 4 + 2 = 8$ (часов) и проехал $90 + 320 + 150 = 560$ (км). Следовательно, его средняя скорость равна $\frac{560}{8} = 70$ км/ч.

Ответ: 70 (км/ч).

23. Заметим, что при $x \neq 0$, $x \neq -1$ $y = -3 + \frac{4x + 4}{x^2 + x} = -3 + \frac{4(x + 1)}{x(x + 1)} =$

$= -3 + \frac{4}{x}$. Таким образом, график исходной функции получается из графика функции

$y = -3 + \frac{4}{x}$ выкалыванием точки с абсциссой $x = -1$, то есть точки $(-1; -7)$. График

функции $y = -3 + \frac{4}{x}$ — это гипербола $y = \frac{4}{x}$, смещённая на 3 единицы вниз. Построим искомый график (см. рис. 21) и определим, что горизонтальная прямая $y = m$ не имеет с ним ни одной общей точки при $m = -7$ и $m = -3$.

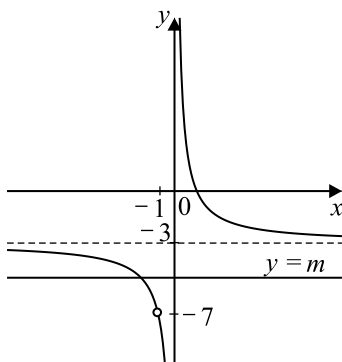


Рис. 21

При остальных значениях m общая точка будет единственной. Искомые значения m принадлежат множеству $(-\infty; -7) \cup (-7; -3) \cup (-3; +\infty)$.

24. Пусть $MB = x$, тогда $DM = 21 - x$ (см. рис. 22).

$\triangle AMB \sim \triangle CMD$ по двум углам. Действительно, $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC ; $\angle ABD = \angle BDC$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BD .

Тогда $\frac{CD}{AB} = \frac{MD}{MB}$, $\frac{42}{56} = \frac{21-x}{x}$,

$\frac{3}{4} = \frac{21-x}{x}$, $84 - 4x = 3x$, $7x = 84$, $x = 12$. Итак, $MB = 12$.

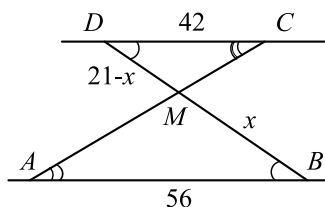


Рис. 22

Ответ: 12.

25. По условию $LA : AM = 1 : 2$, значит, $AM = 2AL$, $LM = 3AL$. В параллелограмме $KLMN$ противоположные стороны равны и параллельны, поэтому $ML = KN = 3AL$, $KL = MN$, $ML \parallel KN$.

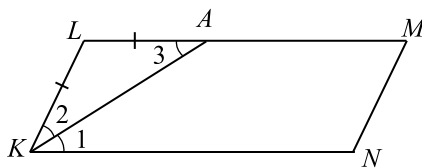


Рис. 23

Рассмотрим секущую KA . Накрест лежащие углы равны, то есть $\angle 1 = \angle 3$. KA — биссектриса угла K , значит, $\angle 1 = \angle 2$. Получаем $\angle 2 = \angle 3$, поэтому треугольник KLA равнобедренный, при этом $LK = LA$. Но $LK = MN$, значит, $KL + MN = 2LK$. Также $ML = KN = 3AL = 3LK$, значит, $LM + KN = 6LK$ и периметр параллелограмма $KLMN$ равен $8LK$.

26. Рассмотрим рисунок 24, на котором основание H высоты, опущенной из вершины B на прямую AC , лежит вне отрезка AC .

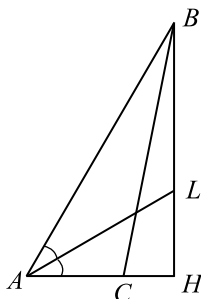


Рис. 24

Пусть AL — биссектриса угла A . По свойству биссектрисы $\frac{AB}{AH} = \frac{BL}{LH} = \frac{13}{5}$, поэтому

$$AB = \frac{13}{5}AH.$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме Пифагора } BH^2 &= AB^2 - AH^2, BH^2 = \left(\frac{13}{5}AH\right)^2 - AH^2 = \\ &= \frac{169AH^2 - 25AH^2}{25} = \frac{144AH^2}{25}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } BH = \frac{12}{5}AH \text{ и } \sin \angle A = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{12}{5}AH}{\frac{13}{5}AH} = \frac{12}{13}.$$

По теореме синусов $2R = \frac{BC}{\sin \angle A}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} = \frac{10}{2 \cdot \frac{12}{13}} = \frac{10 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{12}.$$

Ответ: $\frac{65}{12}$.

Замечание. Решение задачи не изменяется, если вершина B проектируется на сторону AC или в точку C .

Решение варианта 10

21. $x(x^2 + 16x + 64) = 9(x + 8),$

$$x(x + 8)^2 - 9(x + 8) = 0,$$

$$(x + 8)(x(x + 8) - 9) = 0.$$

1) $x + 8 = 0, x_1 = -8.$

2) $x(x + 8) - 9 = 0,$

$$x^2 + 8x - 9 = 0,$$

$$p = 8, q = -9,$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x = -4 \pm \sqrt{16 + 9} = 4 \pm 5,$$

$$x_2 = -4 - 5 = -9,$$

$$x_3 = -4 + 5 = 1.$$

Ответ: $-9; -8; 1.$

22. Пусть скорость второго велосипедиста равна x км/ч ($x > 0$), тогда скорость первого — $(x + 2)$ км/ч. Тогда первый велосипедист 180 км преодолет за $\frac{180}{x+2}$ часов, а второй —

за $\frac{180}{x}$ часов. Из условия задачи составим и решим уравнение $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+2} = 3$, домно-

жим обе части на $x(x + 2) \neq 0$ и разделим на 3, получим $60x + 120 - 60x = x(x + 2), x^2 + 2x - 120 = 0, x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (-120)} = -1 \pm 11, x_1 = -12, x_2 = 10$. Должно выполняться неравенство $x > 0$, поэтому $x = 10$ (км/ч).

Ответ: 10.

23. Заметим, что графиком функции $y = x^2 - 6x$ является парабола с вершиной в точке (x_0, y_0) , где $x_0 = -\frac{-6}{2} = 3$ и $y_0 = x_0^2 - 6x_0 = -9$, ветви параболы направлены вверх, при $x = 1$ значение выражения $x^2 - 6x$ равно -5 .

Графиком функции $y = 2x + 3$ является прямая, при $x = 1$ значение выражения $2x + 3$ равно 5. Изобразим график кусочно заданной функции (см. рис. 25).

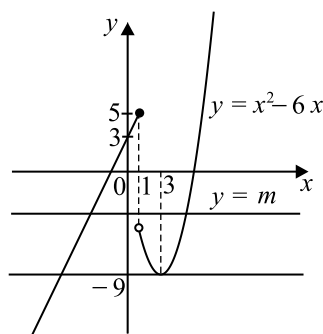


Рис. 25

Горизонтальная прямая $y = m$ будет иметь с кусочно заданным графиком ровно две общие точки при $m = -9$ и $-5 \leq m \leq 5$.

Ответ: $\{-9\} \cup [-5; 5]$

24. Пусть O — центр вписанной окружности, r — её радиус (см. рис. 26). D, L, K — точки касания окружности со сторонами AC, AB и BC соответственно. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CDOK$ — квадрат со стороной, равной r . $AD = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, аналогично $BK = BL$. Катет CB найдём по теореме Пифагора: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2}$. $CB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

$AD = 12 - r, BK = 5 - r, AB = AL + LB = (12 - r) + (5 - r) = 17 - 2r$. По условию $AB = 13$, следовательно, $13 = 17 - 2r$, откуда $r = 2$.

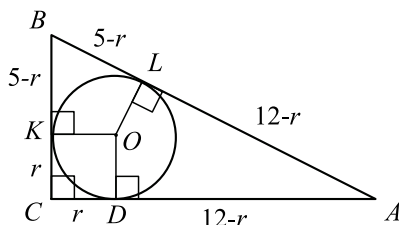


Рис. 26

Ответ: 2.

25. Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам, поэтому $AO = OC$. $\angle EAO = \angle FCO$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC , а $\angle EOA = \angle FOC$ как вертикальные. Значит, треугольники AEO и CFO равны по стороне и прилежащим к ней углам, тогда $AE = CF$.

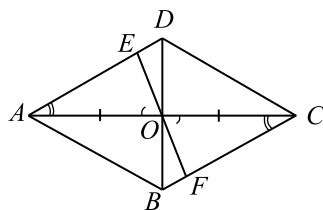


Рис. 27

26. Пусть x и y — катеты прямоугольного треугольника. Тогда по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 6^2$ и по формуле площади треугольника $\frac{1}{2}x \cdot y = 9$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x \cdot y = 18. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ 2x \cdot y = 36. \end{cases}$

Прибавляя ко второму уравнению первое, получим $(x + y)^2 = 72$. Отсюда, так как x и y — неотрицательны, получаем, что $x + y = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, $y = 6\sqrt{2} - x$. Подставляя $6\sqrt{2} - x$ вместо y во второе уравнение системы, получаем: $x \cdot (6\sqrt{2} - x) = 18$; $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0$;
 $x_{1,2} = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 18} = 3\sqrt{2}$.

Квадратное уравнение $x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0$ имеет единственный корень: $x = 3\sqrt{2}$. Тогда $y = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Полученная пара чисел $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ будет решением системы.

Отсюда следует, что катеты прямоугольного треугольника равны, значит он равнобедренный, поэтому острые углы равны и в сумме составляют 90° .

Это означает, что каждый из этих углов равен 45° .

Ответ: 45; 45.

Решение варианта 11

21. $4x(16 - 8x + x^2) = 7(4 - x)$,

$$4x(4 - x)^2 - 7(4 - x) = 0,$$

$$(4 - x)(4x(4 - x) - 7) = 0.$$

1) $4 - x = 0$, $x_1 = 4$.

2) $16x - 4x^2 - 7 = 0$,

$$4x^2 - 16x + 7 = 0,$$

$$a = 4, b = -16, c = 7.$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

$$\frac{D}{4} = \left(-\frac{16}{2}\right)^2 - 4 \cdot 7 = 64 - 28 = 36,$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{36} = 6.$$

$$x = \frac{8 \pm 6}{4}, x_2 = \frac{8 + 6}{4} = 3,5, x_3 = \frac{8 - 6}{4} = 0,5.$$

Ответ: 0,5; 3,5; 4.

22. Пусть второй автомобиль едет со скоростью v км/ч ($v > 0$), тогда первый едет со скоростью $(v + 12)$ км/ч. Второй автомобиль проехал 540 км за $\frac{540}{v}$ ч, а первый — за $\frac{540}{v + 12}$ ч.

По условию должно выполняться равенство $\frac{540}{v} - \frac{540}{v + 12} = 1,5$, $\frac{540(v + 12) - 540v}{v(v + 12)} = 1,5$;

$540 \cdot 12 = 1,5v(v + 12)$; $v^2 + 12v - 4320 = 0$, $v_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 + 4320} = -6 \pm 66$. Должно выполняться неравенство $v > 0$, поэтому $v = 60$. Скорость первого автомобиля равна $v + 12 = 72$ км/ч.

Ответ: 72 км/ч.

23. Заметим, что графиком функции $y = -x^2 + 4x$ является парабола с вершиной в точке (x_0, y_0) , где $x_0 = -\frac{4}{-2} = 2$ и $y_0 = -x_0^2 + 4x_0 = 4$, ветви параболы направлены вниз, при $x = -1$ значение выражения $-x^2 + 4x$ равно -5 .

Графиком функции $y = -x + 8$ является прямая, при $x = -1$ значение выражения $-x + 8$ равно 9. Изобразим график кусочно заданной функции (см. рис. 28).

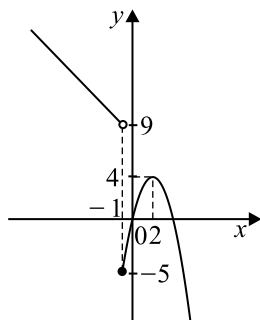


Рис. 28

Горизонтальная прямая $y = t$ будет иметь с кусочно заданным графиком ровно две общие точки при $-5 \leq t < 4$.

Ответ: $[-5; 4)$.

24. Пусть O — центр вписанной окружности, r — её радиус (см. рис. 29). D, L, K — точки касания окружности со сторонами AC, AB и BC соответственно. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CDOK$ — квадрат со стороной, равной r . $AD = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, аналогично $BK = BL$. Гипотенузу AB найдём по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$. $CB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$. $AD = 16 - r, BK = 12 - r$, $AB = AL + LB = (16 - r) + (12 - r) = 28 - 2r$. $AB = 20$, следовательно, $20 = 28 - 2r$, откуда $r = 4$.

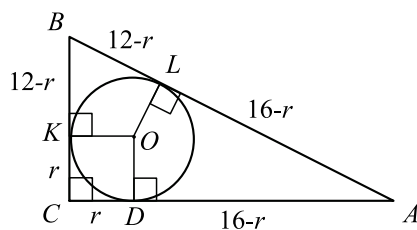


Рис. 29

Ответ: 4.

25. Противоположные стороны параллелограмма равны, значит, $AB = CD$ и $BC = AD$.

$$BP = \frac{1}{2}BC, MD = \frac{1}{2}AD.$$

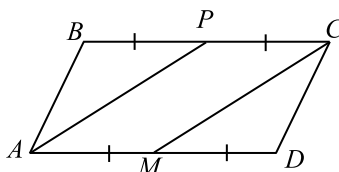


Рис. 30

Противоположные углы параллелограмма равны, значит, $\angle B = \angle D$.

$\triangle ABP = \triangle CDM$: $\angle ABP = \angle CDM$, $AB = CD$, $BP = MD$. Значит, $AP = CM$, так как они лежат против равных углов в равных треугольниках.

26. В соответствии с условием рассмотрим рисунок 31.

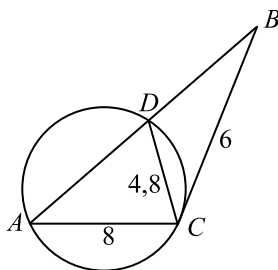


Рис. 31

Угол BCD между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключённой между ними. Точно так же и вписанный угол DAC измеряется половиной этой же дуги. Значит, $\angle DAC = \angle DCB$.

$\triangle BCD \sim \triangle BAC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BAC = \angle BCD$), тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{DC}{AC}$;

$$\frac{BD}{6} = \frac{4,8}{8}; BD = 0,6 \cdot 6 = 3,6.$$

По свойству касательной и секущей получаем $BC^2 = BA \cdot BD$; $6^2 = (AD + 3,6) \cdot 3,6$;
 $36 = (AD + 3,6) \cdot 3,6$; $10 = AD + 3,6$; $AD = 6,4$.

Ответ: 6,4.

Решение варианта 12

$$21. 8x(4 - 4x + x^2) = 3,5(2 - x),$$

$$8x(2 - x)^2 - 3,5(2 - x) = 0,$$

$$(2 - x)(8x(2 - x) - 3,5) = 0.$$

$$1) 2 - x = 0, x_1 = 2.$$

$$2) 8x(2 - x) - 3,5 = 0,$$

$$8x^2 - 16x + 3,5 = 0,$$

$$a = 8, b = -16, c = 3,5.$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

$$\frac{D}{4} = \left(-\frac{16}{2}\right)^2 - 8 \cdot 3,5 = 64 - 28 = 36,$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{36} = 6.$$

$$x = \frac{8 \pm 6}{8}, x_2 = \frac{8 + 6}{8} = 1,75, x_3 = \frac{8 - 6}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25; 1,75; 2.

22. Пусть второй едет со скоростью v км/ч ($v > 0$), тогда первый едет со скоростью $(v + 5)$ км/ч. Первый автомобиль проехал 1200 км за $\frac{1200}{v + 5}$ ч, а второй — за $\frac{1200}{v}$ ч. По

условию должно выполняться равенство $\frac{1200}{v} - \frac{1200}{v+5} = 1$, $\frac{1200(v+5) - 1200v}{v(v+5)} = 1$;

$$1200 \cdot 5 = v(v+5); v^2 + 5v - 6000 = 0, v_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24000}}{2} = \frac{-5 \pm 155}{2}.$$

Должно выполняться неравенство $v > 0$, поэтому $v = 75$. Скорость первого автомобиля равна $v + 5 = 80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

23. Заметим, что графиком функции $y = 2x - x^2$ является парабола с вершиной в точке (x_0, y_0) , где $x_0 = -\frac{2}{-2} = 1$ и $y_0 = -x_0^2 + 2x_0 = 1$, ветви параболы направлены вниз, при $x = -2$ значение выражения $-x^2 + 2x$ равно -8 .

Графиком функции $y = -x - 11$ является прямая, при $x = -2$ значение выражения $-x - 11$ равно -9 . Изобразим график кусочно заданной функции (см. рис. 32).

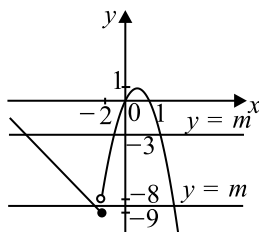


Рис. 32

Горизонтальная прямая $y = m$ будет иметь с кусочно заданным графиком ровно две общие точки при $m = 1$ и $-9 \leq m \leq -8$.

Ответ: $[-9; -8] \cup \{1\}$

24. Пусть O — центр вписанной окружности (см. рис. 33), r — её радиус. D, L, K — точки касания окружности со сторонами AC, AB и BC соответственно. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CDOK$ — квадрат со стороной, равной r . $AD = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, аналогично $BK = BL$. Гипотенузу AB найдём по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. $CB = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$. $AD = 24 - r$, $BK = 7 - r$, $AB = AL + LB = (24 - r) + (7 - r) = 31 - 2r$. $AB = 25$, следовательно, $25 = 31 - 2r$, откуда $r = 3$.

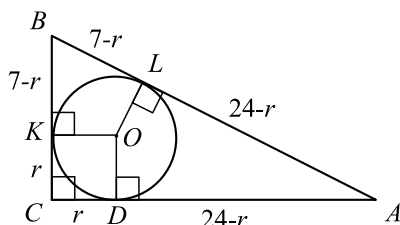


Рис. 33

Ответ: 3.

25. Докажем, что треугольники ADK и ABP равны.

$\triangle ADK = \triangle ABP$ по 1-му признаку равенства треугольников, $AD = AB$ как стороны ромба, $\angle B = \angle D$ как противоположные углы ромба, $BP = KD$ по условию. Значит, и стороны AP и AK равны, так как они лежат против равных углов в равных треугольниках.

26. В соответствии с условием рассмотрим рисунок 35.

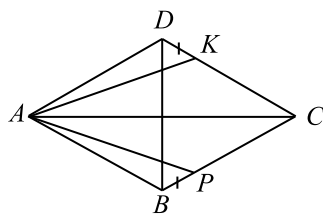


Рис. 34

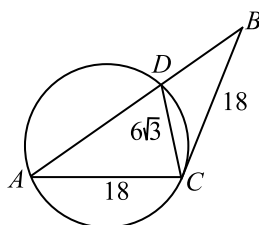


Рис. 35

Угол BCD между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключённой между ними. Точно так же и вписанный угол DAC измеряется половиной этой же дуги. Значит, $\angle DAC = \angle DCB$.

Пусть $\angle DAC = \alpha$, $AD = x$ и $BD = y$.

$$\text{Тогда } \frac{1}{2} \cdot (x + y) \cdot 18 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = S_{ABC} = S_{ADC} + S_{DCB} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot x \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что $18(x + y) = 18x + 18 \cdot 6\sqrt{3}$, $x + y = x + 6\sqrt{3}$, $y = 6\sqrt{3}$.

По свойству касательной и секущей получаем: $BC^2 = BA \cdot BD$; $18^2 = (x + y) \cdot y$,
 $324 = (x + 6\sqrt{3}) \cdot 6\sqrt{3}$; $324 = 6\sqrt{3}x + 108$, $216 = 6\sqrt{3} \cdot x$, $x = \frac{216}{6\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$.

Решение варианта 14

21. $(x - 7)^3 = 36(x - 7)$,

$$(x - 7)^3 - 36(x - 7) = 0,$$

$$(x - 7)((x - 7)^2 - 36) = 0.$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{или} \quad (x - 7)^2 - 36 = 0,$$

$$x_1 = 7, \quad (x - 7)^2 = 36,$$

$$x - 7 = 6 \quad \text{или} \quad x - 7 = -6,$$

$$x_2 = 13 \quad \text{или} \quad x_3 = 1.$$

Ответ: 1; 7; 13.

22. Будем считать, что фрукты состоят из воды и «сухого вещества», масса которого не изменяется в процессе высушивания. В высушенных фруктах $100\% - 8\% = 92\%$ «сухого вещества», то есть $0,92 \cdot 20 = 18,4$ (кг). В свежих фруктах «сухого вещества» столько же, при этом оно составляет $100\% - 90\% = 10\%$ от общей массы.

Составим пропорцию.

$$10\% \text{ — } 18,4 \text{ кг}$$

$$100\% \text{ — } x \text{ кг.}$$

Отсюда $x = \frac{18,4 \cdot 100\%}{10\%} = 184$ (кг).

Ответ: 184 кг.

23. Прямая $y = 2kx$ имеет с параболой $y = x^2 + 4$ единственную общую точку, когда уравнение $x^2 + 4 = 2kx$ имеет единственное решение. В этом случае дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2kx + 4$ должен равняться 0, то есть $(2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, $4k^2 = 16$, $k = -2$ и $k = 2$.

Построим параболу, заданную формулой $y = x^2 + 4$ (это график функции $y = x^2$, смещённый на 4 единицы вверх) (см. рис. 36), а также прямые $y = -4x$ и $y = 4x$.

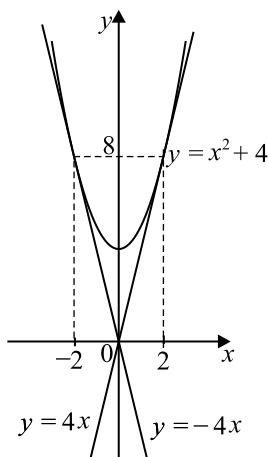


Рис. 36

Ответ: $-2; 2$

24. $\triangle ABH \sim \triangle ABC$ по двум углам. Действительно,

$\angle AHB = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC$ — общий. Тогда $AH : AB = AB : AC$, откуда $AC = \frac{AB^2}{AH}$.

$$AC = \frac{25}{4} = 6,25.$$

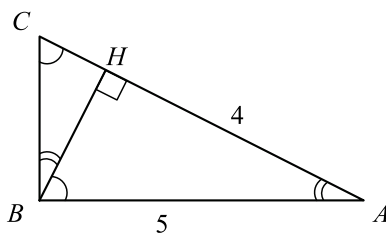


Рис. 37

Ответ: 6,25.

25. Опустим из точки P перпендикуляры PF , PK , PE на прямые AB , BC и AD соответственно.

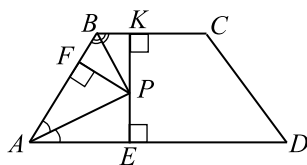


Рис. 38

Рассмотрим прямоугольные треугольники AEP и AFP . $\angle FAP = \angle EAP$ (AP — биссектриса), гипотенуза AP — общая. Треугольники равны по гипотенузе и острому углу, и $PE = PF$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники FBP и PBK . $\angle FBP = \angle PBK$ (BP — биссектриса), гипотенуза BP — общая. Треугольники равны по гипотенузе и острому углу, и $FP = PK$.

Получили $PK = PF = PE$, то есть точка P равноудалена от прямых AB , BC и AD .

Замечание. При решении этой задачи можно воспользоваться теоремой: «любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон». Тогда получим, что P равноудалена от AD , AB и BC .

26. Рассмотрим рисунок 39, AD — большее основание трапеции, BC — меньшее основание трапеции, AB и CD — боковые стороны, $MH \perp AD$ и $BK \perp AD$.

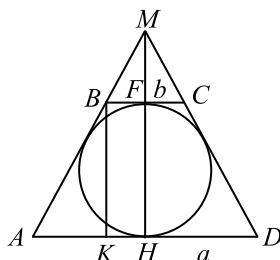


Рис. 39

Пусть $AD = a$, $BC = b$ и $BK = h$, тогда по условию и свойству описанного четырёхугольника получаем, что $AK = \frac{a-b}{2}$, $AB = \frac{a+b}{2}$. По теореме Пифагора

$$h^2 = BK^2 = AB^2 - AK^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Согласно условию, $P = 2(a+b) = 40$, поэтому $a+b = 20$.

$$\text{Так как } S = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ то } 50\sqrt{3} = \frac{20}{2} \cdot h, h = 5\sqrt{3}. \text{ Но } h^2 = ab, \text{ поэтому } \begin{cases} ab = 75, \\ a + b = 20. \end{cases}$$

По теореме Виета получаем, что a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 20x + 75 = 0$. Отсюда $x_1 = 5$ и $x_2 = 15$.

Так как $a > b$, то $a = 15$, $b = 5$.

$$\triangle AKB \sim \triangle BFM, \frac{FM}{BF} = \frac{BK}{AK}, \frac{FM}{\frac{b}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{a-b}{2}}, \frac{FM}{\frac{5}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{15-5}{2}}, \frac{FM}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{10},$$

$$FM = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Решение варианта 15

$$\begin{aligned} 21. \quad x^3 + x^2 &= 4x + 4, \\ x^2(x+1) &= 4(x+1), \end{aligned}$$

$$(x + 1)(x^2 - 4) = 0.$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 4 = 0,$$

$$x_1 = -1 \quad x^2 = 4,$$

$$x_2 = -2 \quad \text{или} \quad x_3 = 2.$$

Ответ: $-1; \pm 2$.

22. Будем считать, что фрукты состоят из воды и «сухого вещества», масса которого не изменяется в процессе высушивания. В свежих фруктах $100\% - 75\% = 25\%$ сухого вещества, то есть $0,25 \cdot 760 = 190$ (кг). В высушенных фруктах «сухого вещества» столько же, при этом оно составляет $100\% - 5\% = 95\%$.

Составим пропорцию.

$$95\% \text{ — } 190 \text{ кг,}$$

$$100\% \text{ — } x \text{ кг.}$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{190 \cdot 100\%}{95\%} = 200 \text{ (кг).}$$

Ответ: 200 кг.

23. Прямая $y = 2kx$ имеет с параболой $y = -x^2 - 9$ единственную общую точку, когда уравнение $-x^2 - 9 = 2kx$ имеет единственное решение. В этом случае дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + 2kx + 9$ должен равняться 0, то есть $(2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, $k = \pm 3$.

Построим параболу (см. рис. 40), заданную формулой $y = -x^2 - 9$, а также прямые $y = -6x$ и $y = 6x$.

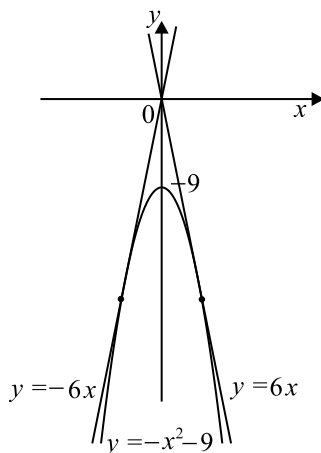


Рис. 40

Ответ: $-3; 3$

24. В прямоугольном треугольнике ABH (см. рис. 41) найдём гипотенузу AB по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{HB^2 + AH^2}$. $BH = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

$\triangle ABH \sim \triangle CBH$ по двум углам. Действительно,

$$\angle AHB = \angle BHC = 90^\circ, \quad \angle BAC = \angle CBH. \quad (\angle BAC + \angle ABH = 90^\circ,$$

$$\angle CBH + \angle ABH = 90^\circ). \quad \text{Тогда } \frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AB}, \quad \text{откуда } BC = \frac{BH \cdot AB}{AH} = \frac{9 \cdot 15}{12} = 11,25.$$

Ответ: 11,25.

25. По условию $KN = \frac{KL}{2}$, $KN = ML$ как противоположные стороны параллелограмма.

Треугольник PLM равнобедренный, так как $PL = \frac{KL}{2} = ML$, значит, равны углы

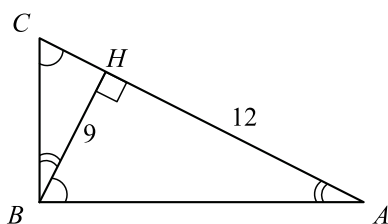


Рис. 41

при основании: $\angle PML = \angle MPL$. $\angle NMP = \angle MPL$ как накрест лежащие углы при прямых $NM \parallel KL$ и секущей PM . Следовательно, $\angle PML = \angle MPL = \angle NMP$, и MP — биссектриса угла NML .

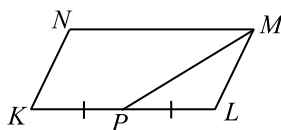


Рис. 42

26. В соответствии с условием получаем рисунок 43.

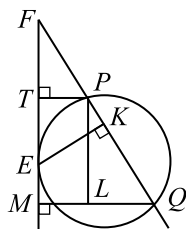


Рис. 43

Отрезки PT и QM перпендикулярны касательной (по условию $PT = 2$, $QM = 5$), $PL \parallel FM$, $EK \perp FQ$. Длина отрезка EK и является расстоянием от точки E до прямой FQ .

Треугольники FPT и PLQ подобны как прямоугольные, имеющие равные острые углы ($\angle PFT = \angle QPL$ как соответственные при $FM \parallel PL$, секущая FQ).

Из подобия следует, что $\frac{PT}{LQ} = \frac{FP}{PQ}$, $\frac{2}{5-2} = \frac{FP}{PQ}$, $FP = \frac{2}{3}PQ$. Отсюда

$$FQ = FP + PQ = \frac{2}{3}PQ + PQ = \frac{5}{3}PQ.$$

По теореме о касательной и секущей получаем:

$$FE^2 = FP \cdot FQ = \frac{2}{3}PQ \cdot \frac{5}{3}PQ = \frac{10}{9}PQ^2, FE = \frac{\sqrt{10}}{3}PQ.$$

Треугольники FPT и $FЕК$ подобны (как прямоугольные, имеющие равные острые

углы). Из подобия следует, что $\frac{PT}{FP} = \frac{ЕК}{EF}$. Отсюда $ЕК = \frac{PT \cdot EF}{FP} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}PQ}{\frac{2}{3}PQ} = \sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Решение варианта 16

21. $x^3 - x^2 = 49x - 49$,

$x^2(x - 1) = 49(x - 1)$,

$$x^2(x-1) - 49(x-1) = 0.$$

$$(x-1)(x^2-49) = 0,$$

$$x-1=0 \quad \text{или} \quad x^2-49=0,$$

$$x_1 = 1$$

$$x^2 = 49,$$

$$x_2 = -7$$

или

$$x_3 = 7.$$

Ответ: 1; ± 7 .

22. Будем считать, что фрукты состоят из воды и «сухого вещества», масса которого не изменяется в процессе высушивания. В свежих фруктах $100\% - 85\% = 15\%$ сухого вещества, то есть $0,15 \cdot 62 = 9,3$ (кг). В высушенных фруктах «сухого вещества» столько же, при этом оно составляет $100\% - 7\% = 93\%$.

Составим пропорцию.

$$93\% \text{ — } 9,3 \text{ кг,}$$

$$100\% \text{ — } x \text{ кг.}$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{9,3 \cdot 100\%}{93\%} = 10 \text{ (кг).}$$

Ответ: 10 кг.

23. Прямая $y = kx$ имеет с параболой $y = -3x^2 - 3$ единственную общую точку, когда уравнение $-3x^2 - 3 = kx$ имеет единственное решение. В этом случае дискриминант квадратного трёхчлена $3x^2 + kx + 3$ должен равняться 0, то есть $k^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0$, $k = \pm 6$.

Построим параболу (см. рис. 44), заданную формулой $y = -3x^2 - 3$, а также прямые $y = -6x$ и $y = 6x$.

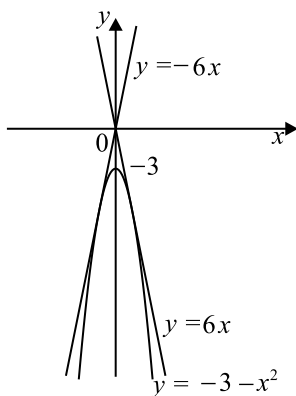


Рис. 44

Ответ: -6 ; 6

24. В прямоугольном треугольнике ABH (см. рис. 45) найдём гипотенузу AB по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{HB^2 + AH^2}$. $BH = \sqrt{9^2 + 40^2} = 41$.

$\triangle ABH \sim \triangle CBH$ по двум углам. Действительно,

$\angle AHB = \angle BHC = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle CBH$. Тогда $\frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AB}$, откуда $BC = \frac{BH \cdot AB}{AH}$.

$$BC = \frac{9 \cdot 41}{40} = 9,225.$$

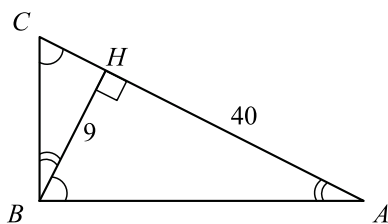


Рис. 45

Ответ: 9,225.

25. Треугольник ABC равнобедренный, так как $AB = BC$, значит, равны углы при основании: $\angle BAC = \angle BCA$. $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие углы при прямых $AB \parallel CD$ и секущей AC . Следовательно, $\angle BCA = \angle DCA$, и CA — биссектриса угла DCB .

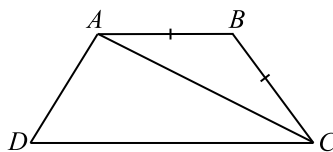


Рис. 46

26. В соответствии с условием получаем рисунок 47.

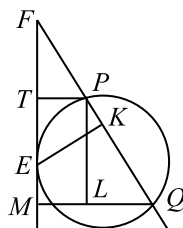


Рис. 47

Отрезки PT и QM перпендикулярны касательной (по условию $PT = 3$, $QM = 5$), $PL \parallel FM$, $EK \perp FQ$. Длина отрезка EK и является расстоянием от точки E до прямой FQ .

Треугольники FPT и PLQ подобны (как прямоугольные, имеющие равные острые углы).

Из подобия следует, что $\frac{PT}{LQ} = \frac{FP}{PQ}$, $\frac{3}{5-3} = \frac{FP}{PQ}$, $FP = \frac{3}{2}PQ$. Отсюда

$$FQ = FP + PQ = \frac{3}{2}PQ + PQ = \frac{5}{2}PQ.$$

По теореме о касательной и секущей получаем:

$$FE^2 = FP \cdot FQ = \frac{3}{2}PQ \cdot \frac{5}{2}PQ = \frac{15}{4}PQ^2, FE = \frac{\sqrt{15}}{2}PQ.$$

Треугольники FPT и $FЕК$ подобны (как прямоугольные, имеющие равные острые углы). Из подобия следует, что $\frac{PT}{FP} = \frac{ЕК}{EF}$. Отсюда $ЕК = \frac{PT \cdot EF}{FP} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} PQ}{\frac{3}{2} PQ} = \sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{15}$.

Решение варианта 18

21. $(7 - x)^4 - 50(7 - x)^2 + 49 = 0$.

Пусть $(7 - x)^2 = t, t \geq 0$.

Уравнение примет вид $t^2 - 50t + 49 = 0$.

$$p = -50, q = 49,$$

$$t = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$t_{1,2} = 25 \pm \sqrt{625 - 49} = 25 \pm \sqrt{576} = 25 \pm 24,$$

$$t_1 = 25 + 24 = 49,$$

$$t_2 = 25 - 24 = 1.$$

Решим уравнения $(7 - x)^2 = 49$ и $(7 - x)^2 = 1$.

1. $(7 - x)^2 = 49,$

$$7 - x = 7 \quad \text{или} \quad 7 - x = -7,$$

$$x_1 = 0 \quad \quad \quad x_2 = 14.$$

2. $(7 - x)^2 = 1,$

$$7 - x = 1 \quad \text{или} \quad 7 - x = -1,$$

$$x_3 = 6 \quad \quad \quad x_4 = 8.$$

Ответ: 0; 6; 8; 14.

22. Пусть второй рабочий делает в час x деталей ($x > 0$), тогда первый — $(x + 4)$. Следовательно, на выполнение заказа в 48 деталей первый рабочий потратит $\frac{48}{x + 4}$ часов, а второй — $\frac{48}{x}$ часов. Для наглядности внесём эти данные в таблицу.

	Количество изготавливаемых деталей в час	Объём заказа (в деталях)	Время на выполнение заказа (в часах)
I рабочий	$x + 4$	48	$\frac{48}{x + 4}$
II рабочий	x	48	$\frac{48}{x}$

По условию задачи должно выполняться равенство

$$\frac{48}{x} - \frac{48}{x + 4} = 2, \text{ отсюда } \frac{24}{x} - \frac{24}{x + 4} = 1.$$

Домножим обе части на $x(x + 4) \neq 0$, получим $24(x + 4) - 24x = x(x + 4);$
 $x^2 + 4x - 96 = 0;$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 96} = -2 \pm 10;$$

$x_1 = 8, x_2 = -12 < 0$ — не удовлетворяет условию.

Таким образом, второй рабочий изготавливает в час 8 деталей.

Ответ: 8.

23. Графиком функции $y = x^2 - 4x + 10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна $-\frac{-4}{2} = 2$, а ордината равна $2^2 - 4 \cdot 2 + 10 = 6$. При $x = 1$ значение выражения $x^2 - 4x + 10$ равно 7, то есть парабола проходит через точку (1; 7).

Графиком функции $y = 7x$ является прямая, проходящая через точку (1; 7) и начало координат.

Построим график исходной кусочно заданной функции (см. рис. 48).

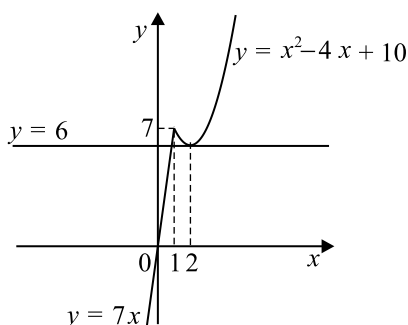


Рис. 48

Из графика видно, что у построенного графика и горизонтальной прямой $y = t$ будет ровно две общие точки при $t = 6$ и $t = 7$.

Ответ: 6; 7

24. Параллельные прямые пересекают стороны угла B треугольника и отсекают от них пропорциональные отрезки (см. рис. 49). Тогда $\frac{KB}{AK} = \frac{MB}{MC}$. По условию $AK : KB = 3 : 8$, следовательно, $MC = 24 \cdot 3 : 8 = 9$.

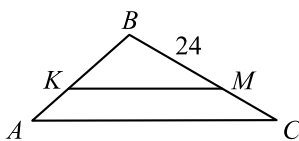


Рис. 49

Ответ: 9.

25. Обозначим h — расстояние между прямыми BC и AD . Тогда высоты трапеций $ABCE$ и $BCDE$ равны h . Так как $AE = ED$, то площади трапеций $ABCE$ и $BCDE$ равны:

$$S_{ABCE} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BC + AE) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BC + ED) = S_{BCDE}.$$

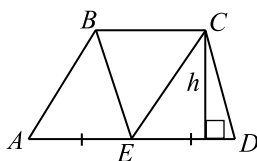


Рис. 50

26. Продолжим боковые стороны трапеции и точку их пересечения обозначим через M . Получим следующий рисунок 51.

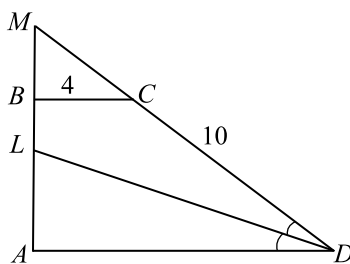


Рис. 51

Пусть $AD = a$, $BM = x$, $CM = y$. Треугольники AMD и BMC подобны (по двум углам).

Из подобия следует, что $\frac{AM}{BM} = \frac{AD}{BC}$, $\frac{6+x}{x} = \frac{a}{4}$, $x = \frac{24}{a-4}$ и $\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{BC}$, $\frac{10+y}{y} = \frac{a}{4}$,
 $y = \frac{40}{a-4}$.

$$\frac{a}{10+y} = \frac{4}{y}, x = 0,6y.$$

По условию AB состоит из 3 одинаковых частей, при этом AL из двух частей, а LB из одной части. Так как $AB = 6$, то $AL = 4$, а $LB = 2$.

По свойству биссектрисы угла MDA получаем: $\frac{AL}{LM} = \frac{AD}{DM}$, $\frac{4}{2+x} = \frac{a}{10+y}$;
 $\frac{4}{2+x} = \frac{4}{y}$, $2+x = y$, $2+0,6y = y$, $y = 5$, $\frac{a}{15} = \frac{4}{5}$, $a = 12$.

$AM = 9$, $AD = 12$, $MD = 10 + 5 = 15$. Так как $9^2 + 12^2 = 15^2$, то треугольник AMD — прямоугольный и угол MAD — прямой. Значит, AB — высота трапеции и её площадь равна $\frac{12+4}{2} \cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

Решение варианта 19

21. $(5+x)^4 - (5+x)^2 - 12 = 0$.

Обозначим $(5+x)^2 = t$, $t \geq 0$.

Уравнение примет вид $t^2 - t - 12 = 0$.

По теореме Виета при $p = -1$ и $q = -12$,

$t_1 + t_2 = 1$ и $t_1 \cdot t_2 = -12$ получим

$$t_1 = 4, t_2 = -3.$$

Значение $t_2 = -3$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Решим уравнение $(5+x)^2 = 4$,

$$5 + x = 2 \quad \text{или} \quad 5 + x = -2,$$

$$x_1 = -3 \quad \quad \quad x_2 = -7.$$

Ответ: -7 ; -3 .

22. Пусть первая труба пропускает в минуту x литров воды ($x > 0$), тогда вторая — $(x+12)$.

Следовательно, на наполнение резервуара объёмом 80 литров первая труба затратит $\frac{80}{x}$

минут, а вторая — $\frac{80}{x+12}$ минут. Для наглядности внесём эти данные в таблицу.

	Количество литров в минуту	Объём воды (в литрах)	Время (в минутах)
I труба	x	80	$\frac{80}{x}$
II труба	$x + 12$	80	$\frac{80}{x + 12}$

По условию задачи должно выполняться равенство

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+12} = 15, \text{ отсюда } \frac{16}{x} - \frac{16}{x+12} = 3.$$

Домножим обе части на $x(x+12) \neq 0$, получим

$$16(x+12) - 16x = 3x(x+12);$$

$$3x^2 + 36x - 192 = 0;$$

$$x^2 + 12x - 64 = 0;$$

$$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{6^2 + 64} = -6 \pm 10;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -16 < 0 \text{ — не удовлетворяет условию.}$$

Таким образом, первая труба пропускает в минуту 4 литра воды.

Ответ: 4.

23. Графиком функции $y = x - 2$ является прямая, проходящая через точки $(0; -2)$ и $(2; 0)$. Графиком функции $y = -2,5x + 5$ является прямая, проходящая через точки $(2; 0)$ и $(5; -7,5)$. Графиком функции $y = 2,5x - 20$ является прямая, проходящая через точки $(5; -7,5)$ и $(8; 0)$.

Построим график исходной кусочно заданной функции (см. рис. 52).

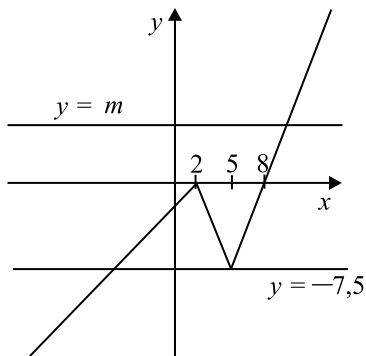


Рис. 52

Из рисунка видно, что у построенного графика и горизонтальной прямой $y = t$ ровно две общие точки будет при $t = 0$ и $t = -7,5$.

Ответ: $-7,5; 0$

24. Прямая, параллельная стороне треугольника (см. рис. 53), отсекает от него подобный ему треугольник: $\triangle BLK \sim \triangle ABC$ ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle BLK$ как соответственные при $LK \parallel AC$ и секущей AB). Тогда $\frac{LB}{AB} = \frac{BK}{BC}$. По условию $AL : LB = 1 : 6$, следовательно, $LB : AB = 6 : 7$, значит, $\frac{6}{7} = \frac{BK}{42}$, откуда $BK = 36$. $KC = BC - BK$, $KC = 42 - 36 = 6$.

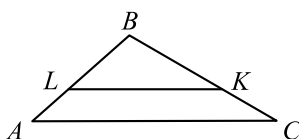


Рис. 53

Ответ: 6.

25. Обозначим $LK = MN = a$, высоту параллелограмма, опущенную на сторону KL — h , высоты треугольников NAM и ALK , проведённые из точки A , — h_1 и h_2 соответственно.

Так как точка A находится внутри параллелограмма, то $h = h_1 + h_2$. Площадь параллелограмма: $S_{KLMN} = h \cdot LK = ah = a(h_1 + h_2)$,

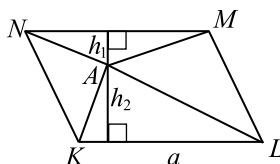


Рис. 54

площади треугольников NAM и ALK :

$$S_{NAM} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot NM = \frac{ah_1}{2}, \quad S_{ALK} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot KL = \frac{ah_2}{2},$$

поэтому сумма равна $S_{NAM} + S_{ALK} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2} = \frac{S_{KLMN}}{2}$.

26. Так как треугольник ABC является остроугольным, то вершина A лежит вне указанной в условии полуокружности, но внутри полосы, образованной касательными полуокружности в точках B и C (см. рис. 55).

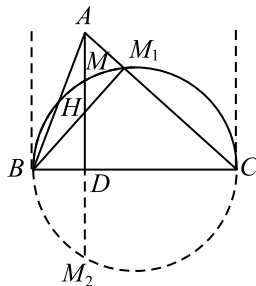


Рис. 55

Обозначим через M_1 точку пересечения стороны AC с заданной полуокружностью. Так как угол BM_1C — вписанный в полуокружность и опирается на её диаметр, то он прямой.

Поэтому BM_1 является высотой треугольника ABC и точка пересечения высоты AD и высоты BM_1 совпадает с точкой H , являющейся точкой пересечения высот треугольника ABC .

Треугольники BHD и ADC подобны, так как они прямоугольные и углы HBD и DAC равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия следует, что $\frac{BD}{HD} = \frac{AD}{CD}$. Отсюда $HD = \frac{BD \cdot CD}{AD}$.

Пусть прямая AD пересекает вторую половину окружности (см. рис. 55) в точке M_2 .

Диаметр $BC \perp MM_2$, значит, $MD = DM_2 = 8$.

По свойству пересекающихся хорд окружности справедливо равенство $BD \cdot CD = MD \cdot M_2D = 8 \cdot 8 = 64$, $HD = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$.

Поэтому $AH = AD - HD = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$.

Ответ: $\frac{20}{3}$.

Решение варианта 20

21. $(1 - x)^4 - 7(1 - x)^2 - 18 = 0$.

Пусть $t = (1 - x)^2$.

Уравнение примет вид $t^2 - 7t - 18 = 0$.

$a = 1, b = -7, c = -18$. $t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{121} = 11.$$

$$t = \frac{7 \pm 11}{2 \cdot 1},$$

$$t_1 = \frac{7 + 11}{2} = 9, t_2 = \frac{7 - 11}{2} = -2.$$

Решим уравнения $(1 - x)^2 = 9$ и $(1 - x)^2 = -2$.

1. $(1 - x)^2 = 9$,

$$\begin{array}{l} 1 - x = 3 \quad \text{или} \quad 1 - x = -3, \\ x_1 = -2 \quad \quad \quad x_2 = 4. \end{array}$$

2. Уравнение $(1 - x)^2 = -2$ действительных корней не имеет.

Ответ: $-2; 4$.

22. Пусть первая труба пропускает в минуту x литров воды ($x > 0$), тогда вторая — $(x + 10)$.

Следовательно, на наполнение резервуара объёмом 240 литров первая труба затратит $\frac{240}{x}$

минут, а вторая — $\frac{240}{x + 10}$ часов. Для наглядности внесём эти данные в таблицу.

	Количество литров в минуту	Объём (в литрах)	Время (в минутах)
I труба	x	240	$\frac{240}{x}$
II труба	$x + 10$	240	$\frac{240}{x + 10}$

По условию задачи должно выполняться равенство

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x + 10} = 25, \text{ отсюда } \frac{48}{x} - \frac{48}{x + 10} = 5.$$

Домножим обе части на $x(x + 10) \neq 0$, получим

$$48(x + 10) - 48x = 5x(x + 10);$$

$$5x^2 + 50x - 480 = 0; x^2 + 10x - 96 = 0;$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 + 96} = -5 \pm 11;$$

$$x_1 = 6, x_2 = -16 < 0 \text{ — не удовлетворяет условию.}$$

Таким образом, первая труба пропускает в минуту 6 литров воды.

Ответ: 6.

23. Графиком функции $y = -x + 3$ является прямая, проходящая через точки $(-2; 5)$ и $(-1; 4)$. Графиком функции $y = 1,5x + 5,5$ является прямая, проходящая через точки $(-1; 4)$ и $(1; 7)$. Графиком функции $y = -3,5x + 10,5$ является прямая, проходящая через точки $(1; 7)$ и $(3; 0)$.

Построим график исходной кусочно заданной функции (см. рис. 56).

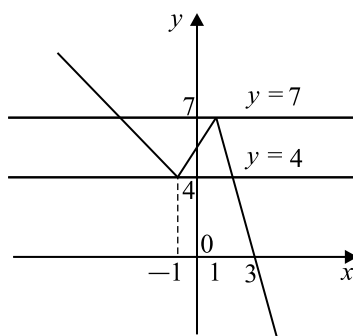


Рис. 56

Из графика видно, что у построенного графика и горизонтальной прямой $y = t$ будет ровно две общие точки при $t = 4$ и $t = 7$.

Ответ: 4; 7

24. Прямая, параллельная стороне треугольника (см. рис. 57), отсекает от него подобный ему треугольник: $\triangle BLK \sim \triangle ABC$ ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle BLK$ как соответственные при $LK \parallel AC$ и секущей AB). Тогда $\frac{LB}{AB} = \frac{BK}{BC}$. По условию $AL : LB = 3 : 5$, следовательно,

$$LB : AB = 5 : 8, \text{ значит, } \frac{5}{8} = \frac{BK}{56}, \text{ откуда } BK = 35. KC = BC - BK, KC = 56 - 35 = 21.$$

Ответ: 21.

25. Проведём через точку E отрезок, перпендикулярный стороне прямоугольника BC до пересечения со сторонами AD и BC . Так как противоположные стороны прямоугольни-

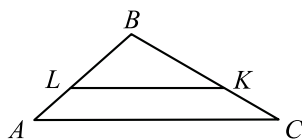


Рис. 57

ка параллельны, этот отрезок будет перпендикулярен и стороне AD . Этот отрезок равен стороне прямоугольника AB .

Обозначим $AD = BC = a$, $AB = b$, высоты треугольников ADE и BCE , проведённые из точки E , — h_1 и h_2 соответственно.

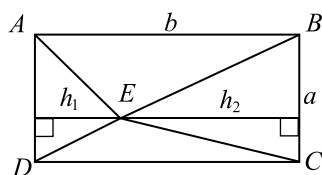


Рис. 58

Так как точка E находится внутри прямоугольника, то $h_1 + h_2 = AB = b$. Площадь прямоугольника:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = ab = a(h_1 + h_2),$$

площади треугольников ADE и BCE :

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot AD = \frac{ah_1}{2}, \quad S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot BC = \frac{ah_2}{2},$$

поэтому сумма равна

$$S_{ADE} + S_{BCE} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

26. Так как треугольник ABC является остроугольным, то вершина A лежит вне указанной в условии полуокружности, но внутри полосы, образованной касательными к полуокружности в точках B и C (см. рис. 59).

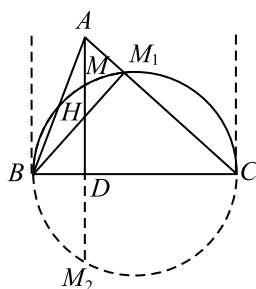


Рис. 59

Обозначим через M_1 точку пересечения стороны AC с заданной полуокружностью. Так как угол BM_1C вписанный в полуокружность и опирается на её диаметр, то он прямой. Поэтому BM_1 является высотой треугольника ABC и точка пересечения высоты AD и высоты BM_1 совпадает с точкой H , являющейся точкой пересечения высот треугольника ABC .

Треугольники BHD и ADC подобны, так как они прямоугольные и углы HBD и DAC равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия следует, что $\frac{BD}{HD} = \frac{AD}{CD}$. Отсюда $HD = \frac{BD \cdot CD}{AD}$.

Пусть прямая AD пересекает вторую половину окружности (см. рис. 59) в точке M_2 .

Диаметр BC перпендикулярен хорде MM_2 , значит, $MD = DM_2 = 8$.

По свойству пересекающихся хорд окружности справедливо равенство $BD \cdot CD = MD \cdot M_2D = 8 \cdot 8 = 64$, $HD = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}$. Поэтому

$$AH = AD - HD = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}.$$

Ответ: $\frac{18}{5}$.

Решение варианта 22

$$21. x + 2 - x^3 - 2x^2 = 0,$$

$$(x + 2) - (x^3 + 2x^2) = 0,$$

$$(x + 2) - x^2(x + 2) = 0,$$

$$(x + 2)(1 - x^2) = 0,$$

$$(x + 2)(1 - x)(1 + x) = 0,$$

$$x + 2 = 0, \quad \text{или} \quad 1 - x = 0, \quad \text{или} \quad 1 + x = 0.$$

$$x = -2, \quad x = 1, \quad x = -1.$$

Ответ: $-2; -1; 1$.

22. Обозначим длину всего пути через S , тогда первую половину автомобиль преодолет за $\frac{S}{2 \cdot 63}$ (ч), а вторую — за $\frac{S}{2 \cdot 84}$ (ч). Тогда весь путь он преодолет за $\frac{S}{2 \cdot 63} + \frac{S}{2 \cdot 84}$ (ч),

отсюда средняя скорость равна $\frac{S}{\frac{S}{2 \cdot 63} + \frac{S}{2 \cdot 84}} = \frac{1}{\frac{1}{42} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{42 \cdot 12}{7} = 72$ (км/ч).

Ответ: 72 км/ч.

23. Разложим многочлен $x^4 - 5x^2 + 4$ на множители. Сделаем замену $x^2 = t$, получим квадратный трёхчлен $t^2 - 5t + 4$. Решив уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$, получим $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Следовательно, $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$. Отсюда, $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Исходная функция примет вид

$$y = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = (x + 1)(x - 2) \text{ при } x \neq -2 \text{ и } x \neq 1.$$

Графиком исходной функции является парабола, задаваемая уравнением $y = (x + 1)(x - 2)$, из которой выколоты точки с абсциссами -2 и 1 . При $x = -2$ выражение $(x + 1)(x - 2)$ равно 4 . При $x = 1$ выражение $(x - 2)(x + 1)$ равно -2 . Абсцисса вершины параболы расположена посередине между корнями и равна $\frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ордината вершины параболы равна $\left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -2,25$. Таким образом, вершина параболы расположена в точке $(0,5; -2,25)$.

Построим график исходной функции (см. рис. 60) и определим, что горизонтальная прямая $y = b$ будет иметь с ним ровно одну общую точку при $b = -2,25$; $b = -2$ и $b = 4$.

Ответ: $-2,25; -2; 4$

24. Диагональ AC трапеции пересекает отрезок EF в точке K (см. рис. 61). $EF = EK + KF$. $\triangle CFK \sim \triangle ACD$, так как отрезок, параллельный основанию треугольника, отсекает подобный ему треугольник ($\angle C$ — общий, $\angle CFK = \angle CDA$ как

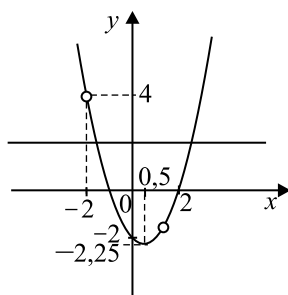


Рис. 60

соответственные при $EF \parallel AD$ и секущей CD). $\frac{KF}{AD} = \frac{CF}{CD}$, $\frac{KF}{54} = \frac{7}{9}$, откуда $KF = 42$.

Аналогично, $\triangle AEK \sim \triangle ABC$. $\frac{EK}{BC} = \frac{AE}{AB}$. Из теоремы Фалеса следует, что $\frac{CF}{FD} = \frac{BE}{AE}$

($EF \parallel BC \parallel AD$). Тогда $\frac{EK}{18} = \frac{2}{9}$, откуда $EK = 4$. $EF = 4 + 42 = 46$.

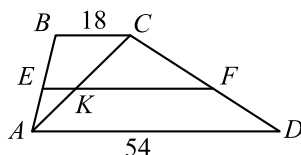


Рис. 61

Ответ: 46.

25. Докажем, что равны площади треугольников ABD и ACD . Треугольники имеют совпадающее основание AD и высоты, равные высоте h трапеции $ABCD$, поэтому их площади равны:

$$S_{ABD} = AD \cdot h, \quad S_{ACD} = AD \cdot h.$$

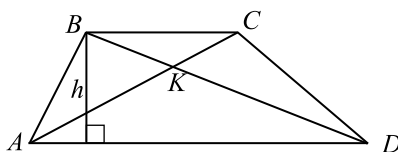


Рис. 62

Площадь треугольника ABD равна сумме площадей треугольников ABK и ADK .

$$S_{ABD} = S_{ABK} + S_{ADK}.$$

$$\text{Аналогично } S_{ACD} = S_{CDK} + S_{ADK}.$$

$$S_{ABK} = S_{ABD} - S_{ADK}.$$

$$\text{Аналогично } S_{CDK} = S_{ACD} - S_{ADK}.$$

Значит, площади треугольников ABK и CDK равны. Что и требовалось доказать.

26. Обозначим через O точку пересечения общих касательных, через O_1 и O_2 — центры окружностей, а через r_1 и r_2 — радиусы окружностей соответственно ($r_2 > r_1$). Рассмотрим рисунок 63.

По свойству вписанной в угол окружности и свойствам касательных к окружности получаем, что точки O , O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла AOB ; O_1A и O_2C перпендикулярны

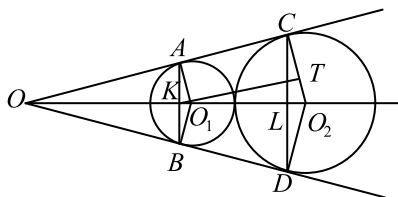


Рис. 63

касательной OC (значит, $O_1A \parallel O_2C$), AB и CD перпендикулярны биссектрисе OO_2 . Пусть K и L — точки пересечения AB и CD соответственно с биссектрисой OO_2 .

Тогда искомое расстояние l между прямыми AB и CD равно $KO_1 + O_1L = KO_1 + r_1 + r_2 - O_2L = KO_1 - O_2L + O_1O_2$, $O_1O_2 = 3 + 5 = 8$.

Через точку O_1 проведём прямую O_1T , параллельную AC , тогда $O_1T \perp O_2C$.

Обозначим через α угол AOO_1 . Тогда из сказанного выше получаем, что $\angle KAO_1 = \angle LCO_2 = \angle TO_1O_2 = \alpha$.

Поэтому $\sin \alpha = \frac{KO_1}{r_1} = \frac{O_2L}{r_2} = \frac{TO_2}{O_1O_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Отсюда получаем, что

$$KO_1 = \frac{r_1 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} = \frac{3}{4}.$$

$$O_2L = \frac{r_2 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{Отсюда } l = \frac{3}{4} + 8 - \frac{5}{4} = 8 - \frac{1}{2} = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

Решение варианта 23

$$21. x^4 = (x - 12)^2,$$

$$x^4 - (x - 12)^2 = 0,$$

$$(x^2 + (x - 12))(x^2 - (x - 12)) = 0,$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - x + 12 = 0.$$

По формулам Виета

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$a = 1, b = -1,$$

$$c = 12;$$

при $p = 1$ и $q = -12$

$$x_1 + x_2 = -1,$$

$$x_1x_2 = -12;$$

имеем $x_1 = -4,$

$$x_2 = 3.$$

$$D = 1 - 48 < 0,$$

корней нет.

Ответ: $-4; 3$.

22. Пусть первая бригада изготовила x деталей, тогда вторая — $4x$ деталей, а третья на 56 больше, то есть $4x + 56$. Всего было изготовлено $x + 4x + (4x + 56) = 9x + 56$ (деталей), что по условию равно 317. Получаем уравнение $9x + 56 = 317$, $9x = 261$, $x = 29$. Значит, первая бригада изготовила 29 деталей, а третья $4 \cdot 29 + 56 = 172$ (детали). Искомая разность равна $172 - 29 = 143$.

Ответ: 143.

23. При $x \neq -3$ функция примет вид

$$y = \frac{(x^2 + 3x)|x|}{x + 3} = \frac{x(x + 3)|x|}{x + 3} = x \cdot |x|. \text{ При } x \geq 0 \text{ получим } y = x^2, \text{ при } x < 0 \text{ } y = -x^2.$$

Построим график исходной функции (см. рис. 64).

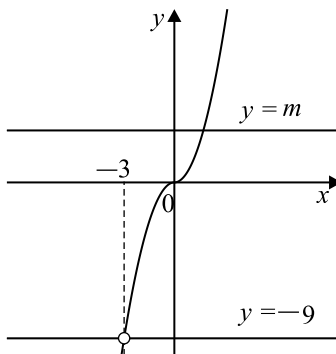


Рис. 64

Из рисунка видно, что у горизонтальной прямой $y = b$ не будет ни одной общей точки с построенным графиком при $m = -9$.

Ответ: -9 .

24. $AD = BC = BK + KC = 13$. ABK равнобедренный, т.к. $\angle BAK = \angle BKA$ (см. рис. 65). Действительно, по условию AK — биссектриса, следовательно, $\angle BAK = \angle KAD$; $\angle AKB = \angle KAD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AK . Итак, $AB = BK = 9$. $P = 2(AB + BC) = 2(9 + 13) = 44$.

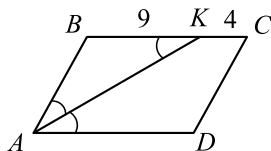


Рис. 65

Ответ: 44.

25. Рассмотрим треугольники ABN и CBN . Их основания AN и CN равны, потому что BN — медиана, и высота BH общая. Найдём площади этих треугольников.

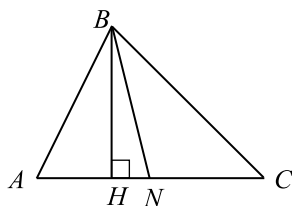


Рис. 66

$S_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot BH$, $S_{CBN} = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot BH$. Получили, что площади треугольников ABN и CBN равны. Что и требовалось доказать.

26. В соответствии с условием рассмотрим рисунок 67, на котором боковые стороны трапеции продолжены до пересечения в точке O , OM — медиана $\triangle ODA$, которая пересекает основание BC в точке M_1 .

Так как сумма углов при основании треугольника ODA равна $79^\circ + 11^\circ = 90^\circ$, то треугольник ODA прямоугольный с прямым углом O .

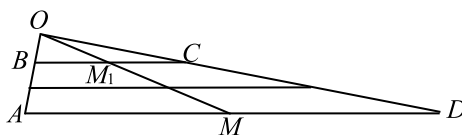


Рис. 67

$\triangle AOM \sim \triangle BOM_1$ и $\triangle MOD \sim \triangle M_1OC$, откуда $\frac{AM}{BM_1} = \frac{MO}{M_1O} = \frac{MD}{M_1C}$. Но $AM = MD$. Поэтому $BM_1 = M_1C$ и M_1M является линией, соединяющей середины оснований.

Пусть a и b — основания трапеции ($a > b$), тогда средняя линия трапеции равна $\frac{a+b}{2}$.

Так как M — середина гипотенузы, то $OM = AM = MD = \frac{a}{2}$. Аналогично, $OM_1 = BM_1 = M_1C = \frac{b}{2}$. Отсюда следует, что $M_1M = OM - OM_1 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Согласно условию, справедливы равенства: $\frac{a+b}{2} = 15$; $\frac{a-b}{2} = 7$. Отсюда $a = 22$, $b = 8$.

Ответ: 22; 8.

Решение варианта 24

$$\begin{aligned} 21. x^6 &= (5x - 4)^3, \\ \sqrt[3]{x^6} &= \sqrt[3]{(5x - 4)^3}, \\ x^2 &= 5x - 4, \\ x^2 - 5x + 4 &= 0, \\ a = 1, b = -5, c &= 4. \end{aligned}$$

Заметим, что $a + b + c = 1 - 5 + 4 = 0$, следовательно, $x_1 = 1$. Отсюда $x_2 = \frac{c}{a} = 4$.

Ответ: 1; 4.

22. Пусть первая бригада изготовила x деталей, тогда вторая — $3x$ деталей, а третья на 29 больше, то есть $3x + 29$. Всего было изготовлено $x + 3x + (3x + 29) = 7x + 29$ (деталей), что по условию равно 498. Получаем уравнение $7x + 29 = 498$, $7x = 469$, $x = 67$. Значит, первая бригада изготовила 67 деталей, а третья $3 \cdot 67 + 29 = 230$ (деталей). Искомая разность равна $230 - 67 = 163$.

Ответ: 163.

23. При $x \neq 2$ функция примет вид

$$y = \frac{(3x^2 - 6x)|x|}{x - 2} = \frac{3x(x - 2)|x|}{x - 2} = 3x \cdot |x|. \text{ При } x \geq 0 \text{ получим } y = 3x^2, \text{ при } x < 0$$

$$y = -3x^2. \text{ Построим график исходной функции (см. рис. 68).}$$

Из рисунка видно, что у горизонтальной прямой $y = b$ не будет ни одной общей точки с построенным графиком при $m = 12$.

Ответ: 12.

24. $AD = BC = BK + KC = 17$. ABK равнобедренный, т.к. $\angle BAK = \angle BKA$ (см. рис. 69). Действительно, по условию AK — биссектриса, следовательно, $\angle BAK = \angle KAD$; $\angle AKB = \angle KAD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AK . Итак, $AB = BK = 12$.

$$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (12 + 17) = 58.$$

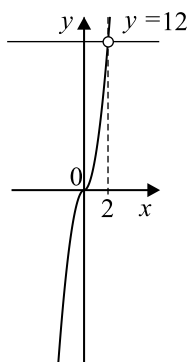


Рис. 68

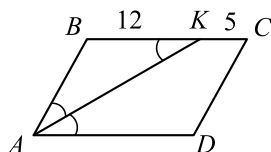


Рис. 69

Ответ: 58.

25. Проведём высоту CH (см. рис. 70). Это высота как треугольника ABC , так и треугольника ACD .

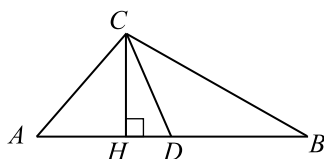


Рис. 70

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot CH$. Но CD — медиана, и $AD = \frac{1}{2}AB$, то есть $AB = 2AD$, получаем $S_{ABC} = AD \cdot CH = 2S_{ACD}$. Что и требовалось доказать.

26. В соответствии с условием рассмотрим рисунок 71, на котором боковые стороны трапеции продлены до пересечения в точке O , OM — медиана треугольника ODA , которая пересекает основание BC в точке M_1 .

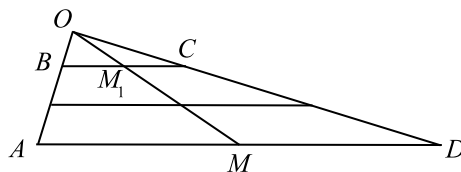


Рис. 71

Так как сумма углов при основании треугольника ODA равна $73^\circ + 17^\circ = 90^\circ$, то треугольник ODA прямоугольный с прямым углом O .

$\triangle AOM \sim \triangle BOM_1$ и $\triangle MOD \sim \triangle M_1OC$, откуда $\frac{AM}{BM_1} = \frac{MO}{M_1O} = \frac{MD}{M_1C}$. Но $AM = MD$. Поэтому $BM_1 = M_1C$ и M_1M является линией, соединяющей середины оснований.

Пусть a и b — основания трапеции ($a > b$), тогда средняя линия трапеции равна $\frac{a+b}{2}$.

Так как M — середина гипотенузы, то $OM = AM = MD = \frac{a}{2}$. Аналогично, $OM_1 = BM_1 = M_1C = \frac{b}{2}$. Отсюда следует, что $M_1M = OM - OM_1 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Согласно условию, справедливы равенства: $\frac{a+b}{2} = 17$; $\frac{a-b}{2} = 9$. Отсюда $a = 26$, $b = 8$.

Ответ: 26; 8.

Решение варианта 26

21. Найдём область определения, решив неравенство $x - 2 \geq 0$, $x \geq 2$, $x \in [2; +\infty)$.

Решим исходное уравнение при условии $x \geq 2$.

$$x^2 + 3x - \sqrt{x-2} = 10 - \sqrt{x-2},$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

По формулам Виета $x_1 + x_2 = -3$, $x_1x_2 = -10$, получим $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $-5 \notin [2; +\infty)$, следовательно, не является корнем исходного уравнения.

Ответ: 2.

22. Так как поезд и пешеход движутся в одном направлении, скорость поезда относительно пешехода равна $76 - 4 = 72$ (км/ч). В одном часе 60 минут, в каждой минуте 60 секунд, значит, в одном часе $60 \cdot 60 = 3600$ секунд. Отсюда, 40 секунд составляют $\frac{40}{3600} = \frac{1}{90}$ часа.

Пусть длина поезда равна x км, тогда мимо человека он пройдёт за $\frac{x}{72}$ часов. Получим уравнение $\frac{x}{72} = \frac{1}{90}$, следовательно, $x = \frac{72}{90} = 0,8$. Значит, длина поезда равна 0,8 км, то есть 800 метров.

Ответ: 800.

23. Прямая $y = 8x$ имеет с параболой $y = x^2 + 2p$ единственную общую точку, когда уравнение $x^2 + 2p = 8x$ имеет единственное решение, то есть когда дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 8x + 2p$ равен нулю (см. рис. 72). Это будет выполнено, если $(-8)^2 - 4 \cdot (2p) = 0$, то есть $p = 8$. График функции $y = x^2 + 2 \cdot 8$ получается из графика функции $y = x^2$ смещением на 16 единиц вверх.

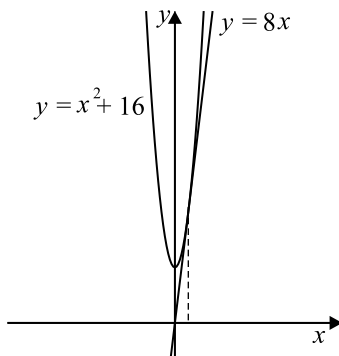


Рис. 72

Ответ: 8.

24. Рассмотрим ромб $ABCD$ с острым углом A , O — точка пересечения его диагоналей (см. рис. 73). Расстояние OH от точки пересечения диагоналей ромба до стороны AD равно 17.

В прямоугольном треугольнике AOH гипотенуза AO , равная 34, в два раза больше катета OH , значит, $\angle OAH = 30^\circ$, а $\angle BAH = 60^\circ$ (диагональ ромба является биссектрисой угла ромба).

$\angle A + \angle B = 180^\circ$, тогда $\angle B = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$. Противоположные углы ромба равны, поэтому $\angle A = \angle C = 60^\circ$, $\angle B = \angle D = 120^\circ$.

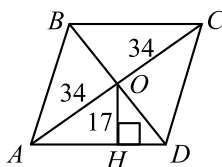


Рис. 73

Замечание. Если предположить, что диагональ $BD = 68$, то, рассуждая аналогично, получим, в прямоугольном треугольнике ODH $\angle ODH = 30^\circ$, тогда $\angle ADC = 60^\circ$, что противоречит тому, что этот угол тупой.

Ответ: 120; 60.

25. Обозначим основания трапеции $BC = a$, $AD = b$, высоту трапеции $CH = h$ (см. рис. 74). Площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BC + AD) = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Проведём среднюю линию трапеции EF , которая параллельна основаниям и длина которой $EF = \frac{a+b}{2}$. Треугольник ABE разбился на два треугольника BEF и AEF .

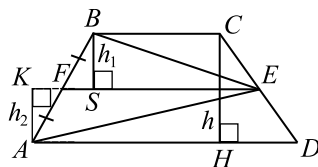


Рис. 74

Проведём из точек A и B высоты $BS \perp EF$ и $AK \perp EF$ и обозначим их h_1 и h_2 соответственно. Так как EF , CB и AD параллельны, $h = h_1 + h_2$.

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot EF = \frac{(a+b)h_1}{4}, \quad S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot EF = \frac{(a+b)h_2}{4}.$$

$$\begin{aligned} S_{ABE} &= S_{BEF} + S_{AEF} = \frac{(a+b)h_1}{4} + \frac{(a+b)h_2}{4} = \frac{(a+b)(h_1 + h_2)}{4} = \\ &= \frac{(a+b)h}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

26. Пусть M , N и P — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC , со сторонами AB , BC и AC соответственно. Тогда $\sin \angle OAP = \frac{8}{17} < \frac{1}{2}$, поэтому $\angle OAP < 30^\circ$. Так как точка O лежит на биссектрисе угла BAC , то $\angle BAC = 2\angle OAP < 60^\circ$.

В соответствии с этим рассмотрим рисунок 75.

По свойствам касательной $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$ и $OM = ON = OP = 5$.

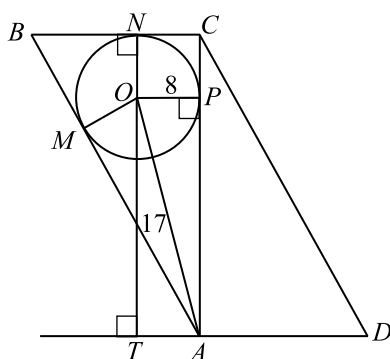


Рис. 75

В прямоугольном треугольнике AOP гипотенуза AO равна 17, катет $OP = 8$, поэтому по теореме Пифагора $AP = 15$. В прямоугольном треугольнике AOT гипотенуза AO равна 17, катет $OT = 15$ по условию, поэтому $\triangle AOT = \triangle AOP$. Кроме этого, $\triangle AOM = \triangle AOP$. Пусть $\angle OAM = \alpha$, тогда $\angle OAP = \alpha$ и $\angle AOT = \alpha$. Значит, $\angle OAT = 90^\circ - \alpha$ и $\angle TAC = \angle TAO + \angle OAC = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$.

Отсюда следует, что $AC \perp AD$, следовательно, $BC \perp AC$. Но $NC \perp AC$ и $OP \perp AC$, значит, $NC \parallel OP$. Аналогично, $ON \parallel CP$. Учитывая, что $MO = OP$, получаем, что $CPON$ — квадрат со стороной 8.

Значит, точки T , O и N лежат на одной прямой, перпендикулярной AD .

$BN = BM$, $AP = AM$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из точек B и A .

Пусть $NB = x$, тогда по свойству касательных $BM = x$.

По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, поэтому

$$(15+8)^2 + (8+x)^2 = (15+x)^2, 529+64+16x+x^2 = 225+30x+x^2, 14x = 368, x = \frac{368}{14} = \frac{184}{7}.$$

$$S_{ABCD} = AC \cdot BC = 23 \cdot \left(8 + \frac{184}{7}\right) = \frac{23 \cdot 240}{7} = \frac{5520}{7}.$$

Ответ: $\frac{5520}{7}$.

Решение варианта 27

21. Заметим, что числитель дроби $12 > 0$, следовательно, неравенство выполняется, если $x^2 - x - 6 < 0$. Левую часть последнего неравенства разложим на множители. Решим уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. По формулам Виета $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -6$, откуда имеем $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Неравенство примет вид $(x + 2)(x - 3) < 0$.

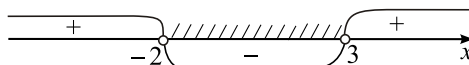


Рис. 76

$-2 < x < 3$ (см. рис. 76).

Ответ: $(-2; 3)$.

22. Предположим, что, работая самостоятельно, Кристина красит забор за x часов, Оля — за y часов, Марина — за z часов. Тогда за 1 час Кристина и Оля покрасят $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть

забора, что по условию равно $\frac{1}{24}$, Оля и Марина — $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{18}$ часть забора, Кристина и Марина — $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{36}$ часть забора. Отсюда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$, $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{9}{72}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{16}$. Таким образом, работая втроём, девочки за 1 час покрасят $\frac{1}{16}$ от всего забора. Тогда весь забор они покрасят за 16 часов.

Ответ: 16.

23. Построим график заданной функции при $x \geq 3$ и при $x < 3$. При $x \geq 3$ уравнение примет вид $y = x^2 - 12x + 30 = (x - 6)^2 - 6$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(6; -6)$, ветви направлены вверх.

При $x < 3$ уравнение примет вид $y = x^2 - 2x$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(1; -1)$, ветви направлены вверх.

Ясно, что $y(3) = 3$.

Построим график заданной функции (см. рис. 77).

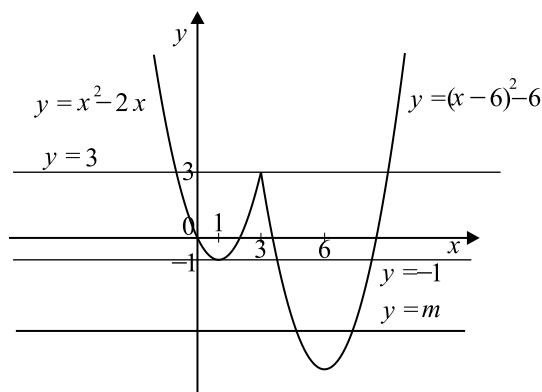


Рис. 77

По рисунку определим, что график заданной функции имеет ровно 3 общие точки с горизонтальной прямой $y = m$ при $m = -1$ и $m = 3$.

Ответ: $-1; 3$

24. $AD = DC = DH + HC = 40 + 1 = 41$ (см. рис. 78). Из прямоугольного треугольника ADH высоту AH найдём по теореме Пифагора: $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$, $AH = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$.

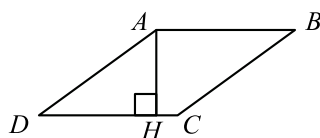


Рис. 78

Ответ: 9.

25. Треугольник BAC подобен треугольнику BAD , так как $\angle B$ общий, а $\angle BAC = \angle BDA$ как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающийся на ту же дугу. Поэтому $BA : BC = BD : BA$, откуда $BA^2 = BC \cdot BD$.

26. В соответствии с условием, рассмотрим рисунок 80.

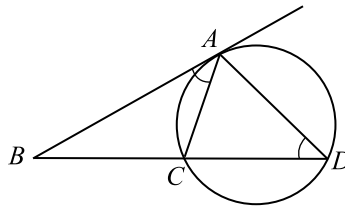


Рис. 79

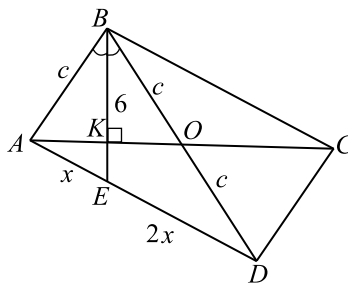


Рис. 80

$\triangle ABK$ и $\triangle BKO$ — прямоугольные, $\angle ABK = \angle KBO$, так как BE — биссектриса, поэтому $\triangle ABK = \triangle BKO$, $AB = BO$. Пусть $AB = c$. Тогда по свойству диагоналей параллелограмма $OD = c$, а по свойству биссектрисы $AE : ED = c : 2c = 1 : 2$. Полагая $AE = x$, получим $ED = 2x$.

По теореме косинусов, учитывая, что $BE = 6$ и $\angle ABE = \angle DBE$ получаем:

$$x^2 = c^2 + 36 - 2c \cdot 6 \cdot \cos \angle ABE; \quad x^2 = c^2 + 36 - 12c \cdot \cos \angle ABE.$$

$$(2x)^2 = (2c)^2 + 36 - 2 \cdot 2c \cdot 6 \cdot \cos \angle DBE; \quad 4x^2 = 4c^2 + 36 - 24c \cdot \cos \angle DBE, \\ 2x^2 = 2c^2 + 18 - 12c \cdot \cos \angle ABE.$$

Вычитая из последнего равенства полученное ранее равенство $x^2 = c^2 + 36 - 12c \cdot \cos \angle ABE$, получаем

$$x^2 = c^2 - 18.$$

По условию $BE = \frac{1}{4}AC$, поэтому $AC = 4BE = 24$. По свойству параллелограмма получаем:

$$24^2 + 4c^2 = 2 \cdot (c^2 + 9x^2); \quad 576 + 4c^2 = 2c^2 + 18x^2; \quad x^2 = \frac{c^2 + 288}{9}.$$

Учитывая ранее найденное значение x^2 , получаем:

$$c^2 - 18 = \frac{c^2 + 288}{9}; \quad 8c^2 = 450; \quad c^2 = \frac{225}{4}; \quad c = \frac{15}{2} = AB;$$

$$x = \sqrt{c^2 - 18} = \sqrt{\frac{225}{4} - 18} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2};$$

$$3x = AD = \frac{9\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{15}{2}; \frac{9\sqrt{17}}{2}.$$

Решение варианта 28

21. Заметим, что числитель дроби $-12 < 0$, следовательно, неравенство выполняется, если $(x-1)^2 - 1 > 0$. Разложим на множители левую часть последнего неравенства по формуле

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b):$$

$$(x - 1 - 1)(x - 1 + 1) > 0,$$

$$x(x - 2) > 0,$$

$$x(x - 2) = 0.$$

$$x = 0 \text{ или } x - 2 = 0; x = 2.$$

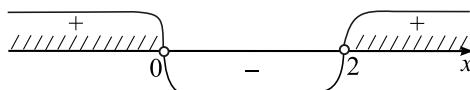


Рис. 81

Решением неравенства будут значения $x < 0$ и $x > 2$ (см. рис. 81).

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

22. Предположим, что, работая самостоятельно, Николай красит забор за x часов, Юрий — за y часов, Алексей — за z часов. Тогда за 1 час Николай и Юрий покрасят $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть забора, что по условию равно $\frac{1}{9}$, Юрий и Алексей —

$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{18}$ часть забора, Николай и Алексей — $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{12}$ часть забора. От-

сюда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$, $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{9}{36}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8}$. Таким

образом, работая втроем, мальчики за 1 час покрасят $\frac{1}{8}$ от всего забора. Тогда весь забор они покрасят за 8 часов.

Ответ: 8.

23. Построим график заданной функции отдельно при $x \geq -2$ и при $x < -2$. При $x \geq -2$ уравнение примет вид $y = 3x + 6 - x^2 - 3x - 7 = -1 - x^2$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(0; -1)$, ветви направлены вниз.

При $x < -2$ уравнение примет вид $y = -x^2 - 6x - 13 = -(x + 3)^2 - 4$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(-3; -4)$, ветви направлены вниз.

Ясно, что $y(-2) = -5$.

Построим график заданной функции (см. рис. 82).

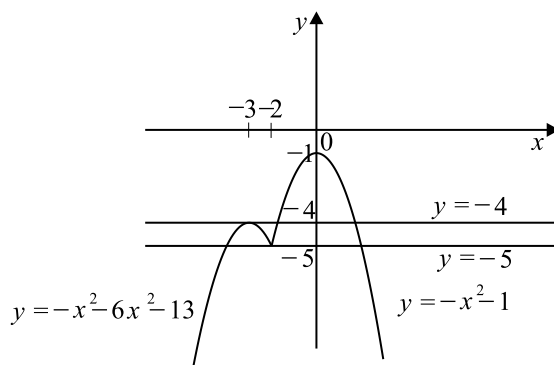


Рис. 82

По рисунку определим, что график заданной функции имеет ровно 3 общие точки с горизонтальной прямой $y = t$ при $t = -5$ и $t = -4$.

Ответ: -5 ; -4 .

24. $CD = DA = DH + HA = 24 + 1 = 25$ (см. рис. 83). Из прямоугольного треугольника CDH высоту CH найдём по теореме Пифагора: $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2}$, $CH = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.

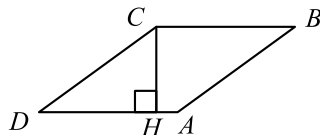


Рис. 83

Ответ: 7.

25. Проведём касательную BA (A — точка касания). Треугольник BAC подобен треугольнику BAD , так как $\angle B$ общий, а $\angle BAC = \angle BDA$ как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающийся на ту же дугу. Поэтому $BA : BC = BD : BA$, откуда $BA^2 = BC \cdot BD$.

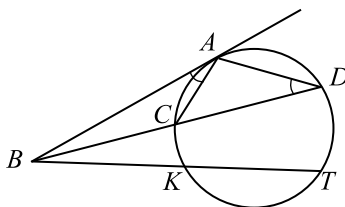


Рис. 84

Аналогично можно доказать, что треугольник BAK подобен треугольнику BAT и $BA^2 = BK \cdot BT$.

Получили, что $BC \cdot BD = BK \cdot BT$.

26. В соответствии с условием рассмотрим рисунок 85.

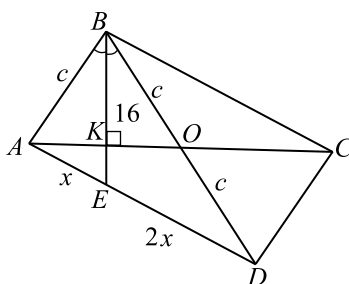


Рис. 85

$\triangle ABK$ и $\triangle BKO$ — прямоугольные, $\angle ABK = \angle KBO$, так как BE — биссектриса, поэтому $\triangle ABK = \triangle BKO$, $AB = BO$. Пусть $AB = c$. Тогда по свойству диагоналей параллелограмма $OD = c$, а по свойству биссектрисы $AE : ED = c : 2c = 1 : 2$. Полагая $AE = x$, получим $ED = 2x$.

По теореме косинусов, учитывая, что $BE = 16$ и $\angle ABE = \angle DBE$, получаем:

$$x^2 = c^2 + 256 - 2c \cdot 16 \cdot \cos \angle ABE; \quad x^2 = c^2 + 256 - 32c \cdot \cos \angle ABE;$$

$$(2x)^2 = (2c)^2 + 256 - 2 \cdot 2c \cdot 16 \cdot \cos \angle DBE;$$

$$4x^2 = 4c^2 + 256 - 64c \cdot \cos \angle DBE, \quad 2x^2 = 2c^2 + 128 - 32c \cdot \cos \angle ABE.$$

Вычитая из последнего равенства полученное ранее равенство $x^2 = c^2 + 256 - 32c \cdot \cos \angle ABE$, получаем: $x^2 = c^2 - 128$.

По условию $BE = \frac{1}{2}AC$, поэтому $AC = 2BE = 32$. По свойству параллелограмма получаем:

$$32^2 + 4c^2 = 2 \cdot (c^2 + 9x^2); 1024 + 4c^2 = 2c^2 + 18x^2; x^2 = \frac{c^2 + 512}{9}.$$

$$\text{Учитывая ранее найденное значение } x^2, \text{ получаем: } c^2 - 128 = \frac{c^2 + 512}{9};$$

$$8c^2 = 128 \cdot 13; c^2 = 16 \cdot 13; c = 4\sqrt{13} = AB,$$

$$x = \sqrt{c^2 - 128} = \sqrt{208 - 128} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

$$3x = AD = 12\sqrt{5}.$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{13}; 12\sqrt{5}.$$

Решение варианта 30

$$21. (b^3 - 25b) \left(\frac{1}{b-5} - \frac{1}{b+5} \right) = b(b-5)(b+5) \frac{b+5-b+5}{(b-5)(b+5)} = 10b.$$

При $b = 15$ получим $10b = 10 \cdot 15 = 150$.

Ответ: 150.

22. Пусть спуск составляет x км, тогда протяжённость подъёма равна $(13 - x)$ км. Пусть скорость на спуске v км/ч, тогда скорость на подъёме равна $(v - 3)$ км/ч. Спуск занял $\frac{x}{v}$ ч,

что по условию равно 3 ч. Подъём занял $\frac{13-x}{v-3}$ ч, что равно $4 - 3 = 1$ (ч). Получим два

уравнения $\frac{x}{v} = 3$, $\frac{13-x}{v-3} = 1$. Из первого уравнения $x = 3v$. Второе уравнение примет вид

$$\frac{13-3v}{v-3} = 1, \text{ отсюда } 13-3v = v-3, 4v = 16, v = 4.$$

На спуске турист шёл со скоростью $v = 4$ км/ч.

Ответ: 4 км/ч.

23. При $x \neq 3$ исходная функция примет вид $y = -x^2 - 9$. Это парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём, при каких значениях параметра k прямая $y = 2kx$ касается указанной параболы. Это будет выполнено в том случае, когда уравнение $-x^2 - 9 = 2kx$ имеет единственное решение, то есть дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 2kx + 9 = 0$ равен нулю: $(2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, $k = \pm 3$.

График исходной функции получится, если из рассмотренной параболы выколоть точку $(3; -18)$. Прямая $y = 2kx$ будет проходить через выколотую точку, если $-18 = 2k \cdot 3$, $k = -3$.

Из рисунка 86 видно, что график функции $y = \frac{(x^2+9)(x-3)}{(3-x)}$ имеет ровно одну общую точку с прямой $y = 2kx$ при $k = 3$.

Ответ: 3.

24. Пусть O — центр окружности, проведём $OH \perp AB$ (см. рис. 87), H — середина отрезка AB (радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам), $OF \perp CD$, F — середина отрезка CD . $OH = 7$, $OF = 15$.

Из прямоугольного треугольника AOH с катетами $AH = 24$, $OH = 7$ найдём гипотенузу AO , которая является радиусом окружности, по теореме Пифагора:

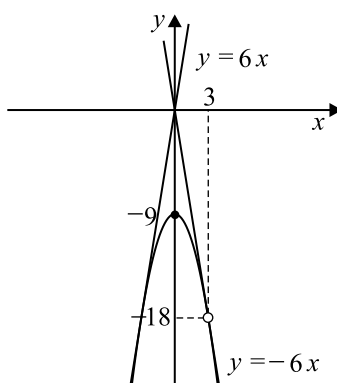


Рис. 86

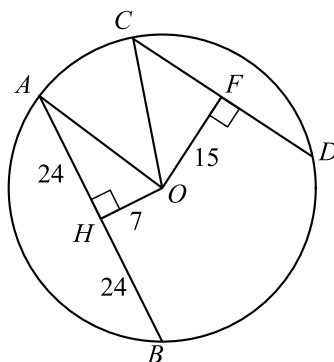


Рис. 87

$AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. $CD = 2CF$, CF найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника COF с гипотенузой CO , равной радиусу окружности. $CD = 2CF = 2\sqrt{CO^2 - OF^2} = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$.

Ответ: 40.

25. В треугольниках BDA и CAE угол A общий. $\angle ABD = 180^\circ - \angle CBD$ как смежные углы, $\angle CED = 180^\circ - \angle CBD$ как противоположные углы вписанного четырёхугольника $BCED$. Значит, $\angle ABD = \angle AEC$ и треугольник BDA подобен треугольнику CAE .

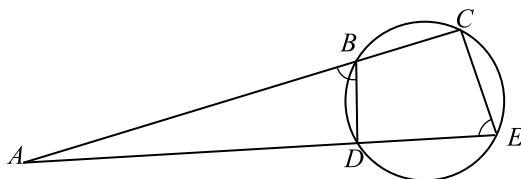


Рис. 88

26. Так как $\cos \angle DAC > 0$, то $\angle DAC$ — острый. По свойству ромба $\angle DAC = \angle BAC$, поэтому $\angle BAC$ — острый. Обозначим через O центр окружности, указанной в условии, через T — точку касания её с лучом AB , через L — середину отрезка MN , через K — точку пересечения прямой OL с лучом AB . Рассмотрим рисунок 89.

В соответствии с рисунком, искомый радиус равен OT .

По свойству касательной к окружности $AB \perp OT$, по свойству хорд окружности $OK \perp MN$, поэтому $OK \perp AC$. Отсюда по свойству углов с взаимно перпендикулярными сторонами получаем, что $\angle KAL = \angle KOT$. Поэтому $\frac{TK}{OT} = \operatorname{tg} \angle KOT = \operatorname{tg} \angle KAL = \operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} \angle DAC$.

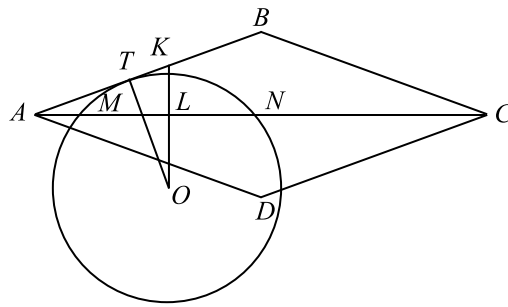


Рис. 89

Значит, $OT = \frac{TK}{\operatorname{tg} \angle BAC} = \frac{TK \cdot \cos \angle DAC}{\sin \angle DAC}$. Так как $\angle DAC$ — острый, то $\sin \angle DAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DAC} = \sqrt{1 - \frac{16}{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Поэтому } OT = \frac{TK \cdot \frac{4}{\sqrt{18}}}{\frac{1}{3}} = \frac{TK \cdot 4}{\sqrt{2}}.$$

Из свойства касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем: $AT^2 = AM \cdot AN = 3 \cdot 6 = 18$; $AT = \sqrt{18}$.

$$AL = AM + ML = 3 + \frac{MN}{2} = 3 + \frac{AN - AM}{2} = 3 + \frac{6 - 3}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\frac{AL}{AK} = \cos \angle DAC = \frac{4}{\sqrt{18}}, \quad AK = \frac{AL}{\frac{4}{\sqrt{18}}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{4}{\sqrt{18}}} = \frac{9\sqrt{18}}{8},$$

$$TK = AK - AT = \frac{9\sqrt{18}}{8} - \sqrt{18} = \frac{\sqrt{18}}{8}.$$

$$\text{Наконец, } OT = \frac{TK \cdot 4}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{18}}{8} \cdot 4}{\sqrt{2}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Замечание. Решение задачи будет точно таким же при другом возможном расположении центра окружности, указанной в условии.

Решение варианта 31

$$21. \frac{4x - 25y}{2\sqrt{x} - 5\sqrt{y}} - 3\sqrt{y} = \frac{(2\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(2\sqrt{x} + 5\sqrt{y})}{2\sqrt{x} - 5\sqrt{y}} - 3\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} - 3\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Если $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$, то $2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

22. Скорость сближения автомобилистов равна $42 + 48 = 90$ (км/ч). Первый автомобилист останавливался на 15 мин $= \frac{1}{4}$ ч, за это время второй автомобилист проехал $48 \cdot \frac{1}{4} = 12$ км.

Оставшиеся $222 - 12 = 210$ км между автомобилями были ими преодолены за $\frac{210}{90} = \frac{7}{3}$ ч. За

это время второй автомобилист проехал $\frac{7}{3} \cdot 48 = 112$ км. Значит, всего второй автомобилист преодолел $112 + 12 = 124$ км, это и есть искомое расстояние.

Ответ: 124 км.

23. Построим отдельно график функции при $x \geq 0$ и при $x < 0$.

При $x \geq 0$ исходная функция примет вид $y = x^2 - 8x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(4; -16)$, ветви направлены вверх.

При $x < 0$ исходная функция примет вид $y = -x^2 + 2x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(1; 1)$, ветви направлены вниз. Построим график исходной функции (см. рис. 90).

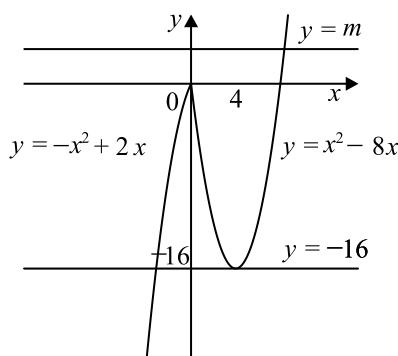


Рис. 90

Из графика видно, что у горизонтальной прямой $y = m$ будет ровно 2 точки с построенным графиком при $m = 0$ и $m = -16$.

Ответ: $-16; 0$

24. Дуга окружности содержит 360° (см. рис. 91). Пусть t — общая мера дуг, длины которых по условию относятся как $4 : 6 : 14$, тогда $4t + 6t + 14t = 360^\circ$, $24t = 360^\circ$, $t = 15^\circ$. Тогда дуги равны соответственно $60^\circ, 90^\circ, 210^\circ$. Угол треугольника измеряется половиной дуги, на которую опирается (это вписанный угол), поэтому углы треугольника равны $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$. Меньшая сторона треугольника лежит против меньшего угла, воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{15}{\sin 30^\circ} = 30.$$

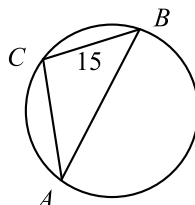


Рис. 91

Ответ: 30.

25. $OA = OB$ и $PA = PB$ как радиусы (см. рис. 92). Треугольник ABO равнобедренный, поэтому высота OK треугольника ABO является его медианой, то есть K — середина AB . Но медиана PK равнобедренного треугольника ABP будет его высотой. Следовательно,

$\angle OKA + \angle AKP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ и точки O, K и P лежат на одной прямой. Тогда $OP \perp AB$.

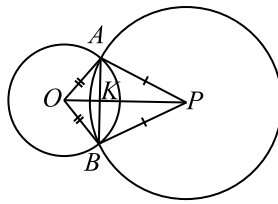


Рис. 92

26. Рассмотрим рисунок 93.

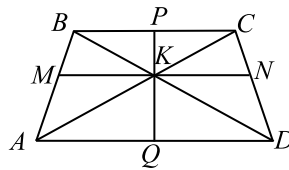


Рис. 93

На рисунке $MN \parallel AD$, $PQ \perp AD$ и проходит через точку K , $\frac{BK}{KD} = \frac{2}{3}$. Заметим, что четырёхугольники $MBCN$ и $AMND$ являются трапециями.

$\triangle BKC \sim \triangle AKD$, так как $\angle KBC = \angle KDA$ и $\angle KCB = \angle KAD$

по свойствам углов при параллельных прямых и секущей. Тогда $\frac{2}{3} = \frac{BK}{KD} = \frac{KC}{KA} = \frac{BC}{AD}$,

поэтому $BK = \frac{2KD}{3}$, $BC = \frac{2AD}{3}$, $KC = \frac{2KA}{3}$.

$\triangle ABD \sim \triangle MKB$, так как $MK \parallel AD$, тогда

$$\frac{MK}{AD} = \frac{BK}{BD} = \frac{BK}{BK + KD} = \frac{\frac{2KD}{3}}{\frac{2KD}{3} + KD} = \frac{2}{5}, MK = \frac{2AD}{5}.$$

Аналогично, из подобия треугольников ACD и NKC получаем, что $NK = \frac{2AD}{5}$. Значит, $MN = \frac{4AD}{5}$.

Наконец, $\triangle BPK \sim \triangle QKD$, откуда $\frac{PK}{QK} = \frac{BK}{KD} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MN + BC) \cdot PK}{\frac{1}{2} \cdot (MN + AD) \cdot KQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{4AD}{5} + \frac{2AD}{3}}{\frac{4AD}{5} + AD} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{4}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{22}{15}}{\frac{27}{15}} = \frac{44}{81}.$$

Ответ: $\frac{44}{81}$.

Решение варианта 32

$$21. \frac{49x - 36y}{7\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \frac{(7\sqrt{x} - 6\sqrt{y})(7\sqrt{x} + 6\sqrt{y})}{7\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} - \sqrt{y} =$$

$$= 7\sqrt{x} - 6\sqrt{y} - \sqrt{y} = 7\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Если $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5$, то $7(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 7 \cdot 5 = 35$.

Ответ: 35.

22. Скорость сближения трактористов равна $32 + 40 = 72$ (км/ч). Первый тракторист останавливался на 45 мин $= \frac{3}{4}$ ч, за это время второй тракторист проехал $40 \cdot \frac{3}{4} = 30$ км.

Оставшиеся $120 - 30 = 90$ км между тракторами были ими преодолены за $\frac{90}{72} = \frac{5}{4}$ (ч). За

это время второй тракторист проехал $\frac{5}{4} \cdot 40 = 50$ (км). Значит, всего второй тракторист преодолел $50 + 30 = 80$ км, это и есть искомое расстояние.

Ответ: 80 км.

23. Построим отдельно график функции при $x \geq 0$ и при $x < 0$.

При $x \geq 0$ исходная функция примет вид $y = x^2 - 2x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(1; -1)$, ветви направлены вверх.

При $x < 0$ исходная функция примет вид $y = -x^2 + 4x$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(2; 4)$, ветви направлены вниз. Построим график исходной функции (см. рис. 94).

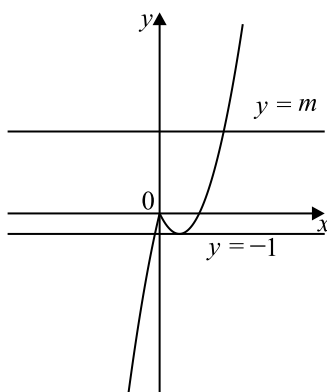


Рис. 94

Из графика видно, что у горизонтальной прямой $y = m$ будет ровно 2 точки с построенным графиком при $m = 0$ и $m = -1$.

Ответ: $-1; 0$

24. Дуга окружности содержит 360° (см. рис. 95). Пусть t - общая мера дуг, длины которых по условию относятся как $10 : 18 : 32$, тогда $10t + 18t + 32t = 360^\circ$, $60t = 360^\circ$, $t = 6^\circ$. Тогда дуги равны соответственно $60^\circ, 108^\circ, 192^\circ$. Угол треугольника измеряется половиной дуги,

на которую опирается (это вписанный угол), поэтому углы треугольника равны $30^\circ, 54^\circ, 96^\circ$. Меньшая сторона треугольника лежит против меньшего угла, воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{13}{\sin 30^\circ} = 26.$$

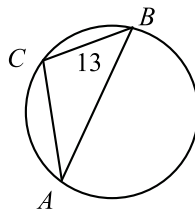


Рис. 95

Ответ: 26.

25. $OA = OB$ и $PA = PB$ как радиусы (см. рис. 96). Треугольник ABO равнобедренный, поэтому высота OK треугольника ABO является его медианой, то есть K — середина AB . Но медиана PK равнобедренного треугольника ABP будет его высотой. Следовательно, $\angle OKA + \angle AKP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ и точки O, K и P лежат на одной прямой. Тогда $OP \perp AB$.

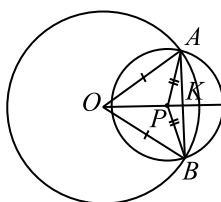


Рис. 96

26. Рассмотрим рисунок 97.

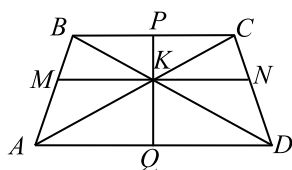


Рис. 97

На рисунке $MN \parallel AD$, $PQ \perp AD$ и проходит через точку K , $\frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}$. Заметим, что четырёхугольники $MBCN$ и $AMND$ являются трапециями.

$\triangle BKC \sim \triangle AKD$, так как $\angle KBC = \angle KDA$ и $\angle KCB = \angle KAD$ по свойствам углов при параллельных прямых и секущей. Тогда $\frac{2}{5} = \frac{BK}{KD} = \frac{KC}{KA} = \frac{BC}{AD}$, поэтому $BK = \frac{2KD}{5}$,

$$BC = \frac{2AD}{5}, \quad KC = \frac{2KA}{5}.$$

$\triangle ABD \sim \triangle MKB$, так как $MK \parallel AD$, тогда

$$\frac{MK}{AD} = \frac{BK}{BD} = \frac{BK}{BK + KD} = \frac{\frac{2KD}{5}}{\frac{2KD}{5} + KD} = \frac{2}{7}, MK = \frac{2AD}{7}.$$

Аналогично, из подобия треугольников ACD и NKC получаем, что $NK = \frac{2AD}{7}$. Значит, $MN = \frac{4AD}{7}$.

Наконец, $\triangle BPK \sim \triangle QKD$, откуда $\frac{PK}{QK} = \frac{BK}{KD} = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (MN + BC) \cdot PK}{\frac{1}{2} \cdot (MN + AD) \cdot KQ} = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{4AD}{7} + \frac{2AD}{5}}{\frac{4AD}{7} + AD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{4}{7} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{7} + 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{34}{35}}{\frac{55}{35}} = \frac{68}{275}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{68}{275}$.

Решение варианта 34

$$21. \begin{cases} (5x + y)^2 = 6y, & (1) \\ (5x + y)^2 = 6x. & (2) \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение.

Получим $6y = 6x$, $y = x$.

Подставим $y = x$ во второе уравнение системы:

$$(5x + x)^2 = 6x,$$

$$(6x)^2 = 6x,$$

$$36x^2 = 6x,$$

$$36x^2 - 6x = 0, 6x(6x - 1) = 0.$$

$$x_1 = 0 \text{ или } 6x - 1 = 0, x_2 = \frac{1}{6}.$$

$(0; 0)$ и $(\frac{1}{6}; \frac{1}{6})$ — решения исходной системы уравнений.

Ответ: $(0; 0), (\frac{1}{6}; \frac{1}{6})$.

22. Расстояние в 60 км плот, двигаясь со скоростью течения, проходит за $\frac{60}{3} = 20$ (часов).

Моторная лодка была в пути на 5 часов меньше, то есть $20 - 5 = 15$ (часов). Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч ($x > 3$). Тогда 108 км по течению лодка пройдёт за $\frac{108}{x+3}$ (часов), а 108 (км) против течения — за $\frac{108}{x-3}$ часов. Составим и решим уравнение

$\frac{108}{x-3} + \frac{108}{x+3} = 15$; $\frac{36}{x-3} + \frac{36}{x+3} = 5$; домножим числитель и знаменатель на $(x-3)(x+3)$; получим $36(x+3) + 36(x-3) = 5(x-3)(x+3)$; $5(x^2-9) - 72x = 0$; $5x^2 - 72x - 45 = 0$;
 $x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 + 5 \cdot 45}}{5} = \frac{36 \pm \sqrt{1521}}{5} = \frac{36 \pm 39}{5}$; $x_1 = 15$; $x_2 = -\frac{3}{5}$. Учитывая, что $x > 3$, получим, что скорость моторной лодки в неподвижной воде равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

23. ОДЗ $x \neq 0$.

Если $3x - \frac{3}{x} \geq 0$, то исходная функция примет вид $y = \frac{1}{2} \left(\left(3x - \frac{3}{x} \right) - 3x - \frac{3}{x} \right) = -\frac{3}{x}$.

Если $3x - \frac{3}{x} < 0$, то исходная функция примет вид $y = \frac{1}{2} \left(- \left(3x - \frac{3}{x} \right) - 3x - \frac{3}{x} \right) = -3x$.

Решим неравенство $3x - \frac{3}{x} \geq 0$, $\frac{3x^2 - 3}{x} \geq 0$, $\frac{3(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$, $x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

Аналогично, $3x - \frac{3}{x} < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Заметим, что $y(-1) = 3$, $y(1) = -3$.

Для $x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$ построим график функции $y = -\frac{3}{x}$, а для

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ график функции $y = -3x$.

Из рисунка 98 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет ровно 2 общие точки с построенным графиком при $-3 < m < 0$ и $m > 3$.

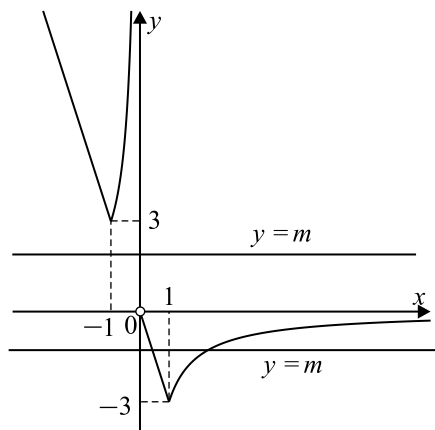


Рис. 98

Ответ: $(-3; 0) \cup (3; +\infty)$.

24. Треугольник BKM равнобедренный ($BM = BK$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки) (см. рис. 99). $\angle BKM$ измеряется половиной дуги MK , заключённой между касательной BM и хордой MK . $\angle MPK = \angle BKM$ как вписанный угол, который измеряется половиной дуги MK . Получим $\angle MPK = \angle BKM = \angle BKM = 68^\circ$.

$\angle MBK = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$. $\angle AMP = 180^\circ - 55^\circ - 68^\circ = 57^\circ$. Из равнобедренного треугольника AMP ($AM = AP$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки) $\angle BAC = 180^\circ - 2 \cdot 57^\circ = 66^\circ$. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (66^\circ + 44^\circ) = 70^\circ$.

Ответ: 66; 44; 70.

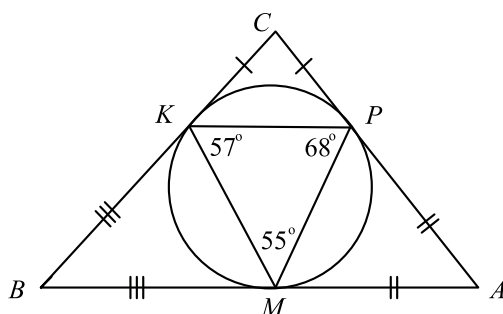


Рис. 99

25. Опишем около треугольника KBN окружность и на её дуге KN отметим произвольную точку E , расположенную в той полуплоскости, в которой нет точек B и M (см. рис. 100). По построению четырёхугольник $KBNE$ вписан в эту окружность, поэтому $\angle KBN + \angle KEN = 180^\circ$. По условию $\angle KBN = \angle KMN$, поэтому $\angle KMN + \angle KEN = 180^\circ$. Значит, в четырёхугольнике $KMNE$ сумма противоположных углов KMN и KEN равна 180° , а следовательно, четырёхугольник $KMNE$ также вписан в эту окружность. Значит, точки K, B, M, N лежат на одной окружности.

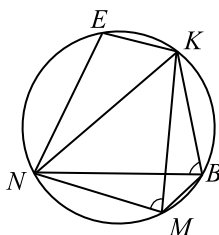


Рис. 100

Тогда углы NKM и NBM вписанные и опираются на одну дугу NM и, следовательно, равны.

26. Обозначим угол B треугольника ABC через β (см. рис. 101).

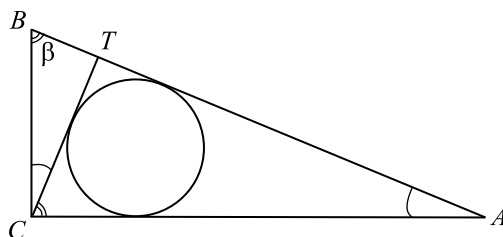


Рис. 101

Тогда $\angle ACT = \angle TBC = \beta$ и $\angle TCB = \angle TAC = 90^\circ - \beta$. Значит $\triangle TCB \sim \triangle TCA$ по двум углам. При этом парами сходственных сторон будут BC и AC , CT и AT , TB и CT .

$$\text{Отсюда, } \frac{15}{8} = \operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{AT}{CT} = \frac{CT}{TB}.$$

Поэтому $AC = \frac{15}{8}BC$, $AT = \frac{15}{8}CT$, $CT = \frac{15}{8}BT$.

Обозначим через S_1 площадь треугольника TCB , через r_1 радиус окружности, вписанной в треугольник TCB , а через p_1 полупериметр треугольника TCB . Аналогично, через S_2 , r_2 и p_2 соответственно площадь, радиус вписанной окружности и полупериметр треугольника TCA .

Известно, что радиус r вписанной в треугольник окружности находится по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, а p — полупериметр.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } r_2 &= \frac{S_2}{p_2} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot TC \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2}(TC + AC + AT)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8}BC \cdot \frac{15}{8}BT \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2}\left(\frac{15}{8}BT + \frac{15}{8}BC + \frac{15}{8}CT\right)} = \frac{\frac{15}{8} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BT \cdot \sin \beta}{\frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot (BT + BC + CT)} = \\ &= \frac{\frac{15}{8}S_1}{p_1} = \frac{15}{8}r_1. \end{aligned}$$

Так как $r_2 = 30$, то $r_1 = \frac{8}{15}r_2 = \frac{8}{15} \cdot 30 = 16$.

Ответ: 16.

Решение варианта 35

21. $f(x - 2) = 4^{9-x}$.

По условию надо найти $f(5)$, следовательно, $x - 2 = 5$, $x = 7$. $f(5) = 4^{9-7} = 4^2 = 16$.

Ответ: 16.

22. По условию скорость первого человека равна 2,5 км/ч, а второго — 3,5 км/ч. Тогда от точки отправления до опушки леса второй человек доберётся за $\frac{4,8}{3,5}$ ч, за это время

первый пройдёт $\frac{4,8}{3,5} \cdot 2,5$ км. Таким образом, в момент, когда второй человек поворачивает обратно, между первым и вторым человеком будет расстояние $\left(4,8 - \frac{4,8}{3,5} \cdot 2,5\right)$ км.

Скорость их сближения равна $2,5 + 3,5 = 6$ (км/ч). Поэтому они встретятся через $\frac{4,8 - \frac{4,8}{3,5} \cdot 2,5}{6} = \frac{4,8}{6} \cdot \left(1 - \frac{2,5}{3,5}\right) = 0,8 \cdot \frac{10}{35} = \frac{8}{35}$ ч после поворота второго человека.

Значит, от момента начала движения пройдёт $\frac{4,8}{3,5} + \frac{8}{35} = \frac{48 + 8}{35} = \frac{8}{5}$ ч. За это время первый человек пройдёт $\frac{8}{5} \cdot 2,5 = 4$ км. Значит, встреча произойдёт на расстоянии 4 км от точки отправления.

Ответ: 4

23. Построим график функции $y = x^2 + 3x - 10$ (см. рис. 102).

Это парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{3}{2} = -1,5$ и ординатой $y_0 = x_0^2 + 3x_0 - 10 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 10 = -12,25$. График функции $y = |x^2 + 3x - 10|$ получится, если отразить часть параболы, находящуюся ниже оси абсцисс, относительно оси абсцисс. Из рисунка видно, что горизонтальная прямая

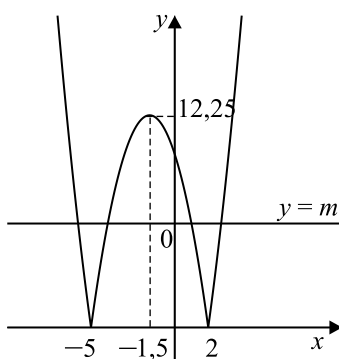


Рис. 102

$y = m$ пересекает график функции $y = |x^2 + 3x - 10|$ в двух, трёх, четырёх точках, либо вообще не пересекает. Наибольшее количество общих точек равно 4.

Ответ: 4

24. По условию прямой угол PBK вписан в окружность (см. рис. 103), следовательно, он опирается на диаметр PK , равный диаметру BH , значит, $PK = 17$.

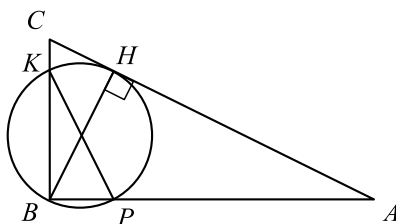


Рис. 103

Ответ: 17.

25. Углы PTK и PSK прямые, поэтому точки S и T лежат на окружности с диаметром PK . Треугольник PKM остроугольный, поэтому основания высот лежат на сторонах треугольника.

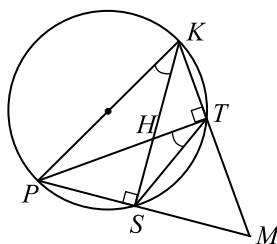


Рис. 104

Значит, точки P, S, T, K лежат на одной окружности в указанном порядке, и углы PTS и PKS равны как вписанные и опирающиеся на одну дугу.

26. Обозначим через O точку пересечения боковых сторон трапеции, а через T — точку касания указанной в условии окружности с прямой CD . Рассмотрим рисунок 105.

Заметим, что указанная в условии задачи окружность является описанной около треугольника ABT . Для нахождения радиуса R этой окружности найдём площадь треуголь-

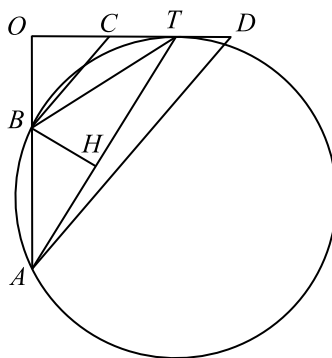


Рис. 105

ника ABT . Из формулы $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ (где a, b, c — стороны треугольника) получаем

$$R = \frac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}}.$$

В треугольнике AOD сумма углов A и D по условию равна 90° , значит, в треугольнике AOD угол O является прямым. Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, поэтому $\frac{AD}{BC} = \frac{21}{7} = 3 = \frac{AO}{BO}$, $AO = 3BO$, $AB = 2BO$. Но $AB = 12$, поэтому $BO = 6$ и $AO = 18$.

По свойству касательной OT и секущей OA , проведённых из одной точки к окружности, получаем: $OT^2 = OA \cdot OB$; $OT^2 = 18 \cdot 6$; $OT^2 = 108$.

По теореме Пифагора $BT^2 = BO^2 + OT^2 = 36 + 108 = 144$, $BT = 12$.

$AT^2 = AO^2 + OT^2 = 18^2 + 108 = 324 + 108 = 432$, $AT = 12\sqrt{3}$.

На рисунке 105 $BH \perp AT$, поэтому $S_{ABT} = \frac{1}{2}AT \cdot BH$. Так как треугольник ABT

является равнобедренным, то $S_{ABT} = \frac{1}{2}AT \cdot \sqrt{AB^2 - (\frac{1}{2}AT)^2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{144 - (6\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}.$$

$$R = \frac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3} \cdot 12}{4 \cdot 36\sqrt{3}} = 12.$$

Ответ: 12.

Решение варианта 36

21. $f(2x - 3) = 21 - 5x$.

По условию надо найти $f(7)$, следовательно, $2x - 3 = 7$, $x = 5$.

$f(7) = 21 - 5 \cdot 5 = 21 - 25 = -4$.

Ответ: -4 .

22. По условию скорость пешехода равна $2,8$ км/ч, а велосипедиста — $12,6$ км/ч. Тогда от точки отправления до опушки леса велосипедист доберётся за $\frac{5,5}{12,6} = \frac{55}{126}$ (ч), за это

время пешеход пройдёт $\frac{55}{126} \cdot 2,8 = \frac{154}{126} = \frac{11}{9}$ км. Таким образом, в момент, когда велосипедист поворачивает обратно, между пешеходом и велосипедистом будет расстояние $(5,5 - \frac{11}{9}) = 11 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{9}) = \frac{77}{18}$ км. Скорость их сближения равна $2,8 + 12,6 = 15,4$ (км/ч).

Поэтому они встретятся через $\frac{\frac{77}{18}}{15,4} = \frac{770}{18 \cdot 154} = \frac{5}{18}$ ч после поворота велосипедиста. Значит, от момента начала движения пройдёт $\frac{55}{126} + \frac{5}{18} = \frac{90}{126} = \frac{5}{7}$ ч. За это время пешеход пройдёт $\frac{5}{7} \cdot 2,8 = 2$ км. Значит, встреча произойдёт на расстоянии 2 км от точки отправления.

Ответ: 2.

23. Построим график функции $y = x^2 - 3x - 4$. Это парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{-3}{2} = 1,5$ и ординатой $y_0 = x_0^2 - 3x_0 - 4 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -6,25$. График функции $y = |x^2 - 3x - 4|$ получится, если отразить часть параболы, находящуюся ниже оси абсцисс, относительно оси абсцисс. Из рисунка 106 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ пересекает график функции $y = |x^2 - 3x - 4|$ в двух, трёх, четырёх точках, либо вообще не пересекает. Наибольшее количество общих точек равно 4.

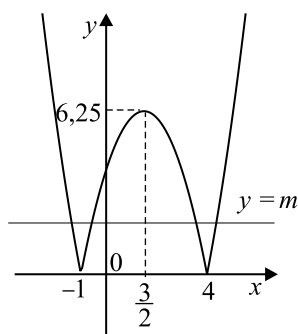


Рис. 106

Ответ: 4

24. По условию прямой угол PBK вписан в окружность (см. рис. 107), следовательно, он опирается на диаметр PK , равный диаметру BH , значит, $PK = 15$.

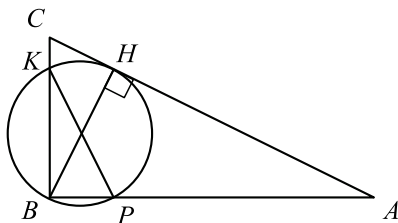


Рис. 107

Ответ: 15.

25. Углы RTK и RCK прямые, поэтому точки C и T лежат на окружности с диаметром RK . Треугольник RKN остроугольный, поэтому основания высот лежат на сторонах треугольника.

Значит, точки R, C, T, K лежат на одной окружности в указанном порядке, хорды RT и KC пересекаются в точке A и по теореме о хордах $RA \cdot AT = KA \cdot AC$.

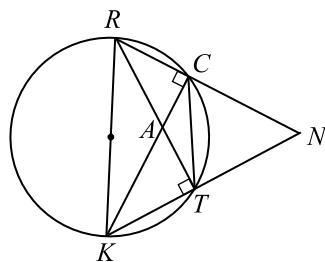


Рис. 108

26. Обозначим через O точку пересечения боковых сторон трапеции, а через T точку касания указанной в условии окружности с прямой CD . Рассмотрим рисунок 109.

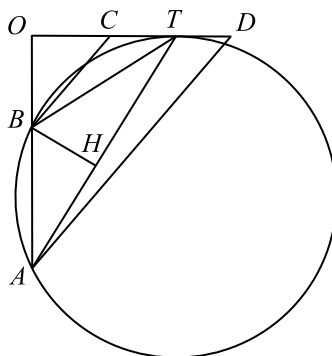


Рис. 109

Заметим, что указанная в условии задачи окружность является описанной около треугольника ABT . Для нахождения радиуса R этой окружности найдём площадь треугольника ABT . Из формулы $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ (где a, b, c — стороны треугольника) получаем

$$R = \frac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}}.$$

В треугольнике AOD сумма углов A и D по условию равна 90° , значит, в треугольнике AOD угол O является прямым. Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, поэтому $\frac{AD}{BC} = \frac{15}{5} = 3 = \frac{AO}{BO}$, $AO = 3BO$, $AB = 2BO$. Но $AB = 6$, поэтому $BO = 3$ и $AO = 9$.

По свойству касательной OT и секущей OA , проведённых из одной точки к окружности, получаем: $OT^2 = OA \cdot OB$; $OT^2 = 9 \cdot 3$; $OT^2 = 27$.

По теореме Пифагора $BT^2 = BO^2 + OT^2 = 9 + 27 = 36$, $BT = 6$.

$AT^2 = AO^2 + OT^2 = 9^2 + 27 = 81 + 27 = 108$, $AT = 6\sqrt{3}$.

На рисунке 109 $BH \perp AT$, поэтому $S_{ABT} = \frac{1}{2}AT \cdot BH$. Так как треугольник ABT

является равнобедренным, то $S_{ABT} = \frac{1}{2}AT \cdot \sqrt{AB^2 - (\frac{1}{2}AT)^2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{36 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}.$$

$$R = \frac{AB \cdot AT \cdot BT}{4S_{ABT}} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6}{4 \cdot 9\sqrt{3}} = 6.$$

Ответ: 6.

Решение варианта 38

$$21. \frac{4a - 9b + 8}{9a - 4b + 8} = 9,$$

$$4a - 9b + 8 = 81a - 36b + 72,$$

$$81a - 36b + 72 - 4a + 9b - 8 = 0,$$

$$77a - 27b + 64 = 0,$$

$$77a - 27b + 70 - 6 = 0,$$

$$77a - 27b + 70 = 6.$$

Ответ: 6.

22. Третий велосипедист выехал через $1 + 2 = 3$ (ч) после выезда первого. Пусть все велосипедисты выехали из пункта А. Через 3 часа после начала движения первый велосипедист будет на расстоянии $3 \cdot 16 = 48$ км (к тому времени он был в пути 3 часа), а второй — на расстоянии 20 км (к тому времени он был в пути 1 час). Пусть скорость третьего велосипедиста равна v км/ч ($v > 20$). Тогда его скорость сближения с первым равна $(v - 16)$ км/ч, а со вторым — $(v - 20)$ км/ч. Значит, первого он догонит через $\frac{48}{v - 16}$ ч, а второго — че-

рез $\frac{20}{v - 20}$ ч. По условию задачи должно выполняться равенство $\frac{48}{v - 16} - \frac{20}{v - 20} = 1$;

$48(v - 20) - 20(v - 16) = (v - 16)(v - 20)$; $28v - 640 = v^2 - 36v + 320$; $v^2 - 64v + 960 = 0$, $v_1 = 24$, $v_2 = 40$. Из этих значений только $v = 24$ удовлетворяет условию $20 < v < 35$. Значит, искомая скорость равна 24 км/ч.

Ответ: 24.

23. Графиком функции $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ является парабола с вершиной в точке $(3; 0)$, ветви параболы направлены вверх. При этом $(5 - 3)^2 = 4$, то есть парабола проходит через точку $(5; 4)$. Графиком функции $y = \frac{20}{x}$ является гипербола, также проходящая через точку $(5; 4)$.

Построим исходную кусочно заданную функцию (см. рис. 110).

Из рисунка видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет единственную точку пересечения с построенным графиком при $m = 0$ и $m > 4$.

Значит, условию удовлетворяют значения m из множества $\{0\} \cup (4; +\infty)$.

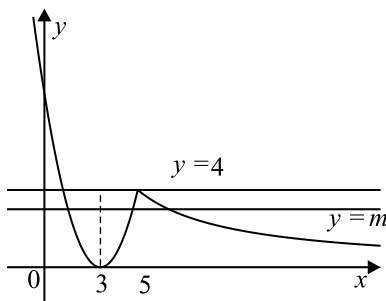


Рис. 110

Ответ: $\{0\} \cup (4; +\infty)$.

24. Пусть O — центр окружности, DC — диаметр (см. рис. 111). Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть:

$AB^2 = AC \cdot AD$, так как $AB = 11$, а $AC = 55$, то $11^2 = 55 \cdot AD$, откуда $AD = 2,2$. Тогда $DC = AC - AD$, $DC = 55 - 2,2 = 52,8$.

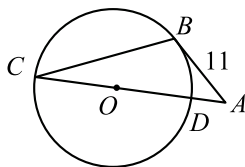


Рис. 111

Ответ: 52,8.

25. Углы RTK и RCK прямые, поэтому точки C и T лежат на окружности с диаметром RK (см. рис. 112). Треугольник RKP остроугольный, поэтому основания высот лежат на сторонах треугольника.

Значит, точки R, C, T, K лежат на одной окружности в указанном порядке.

$\angle PCT = \angle 2 + \angle 4$ как внешний угол треугольника RCT .

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одни и те же дуги.

$\angle PKR = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Значит, $\angle PCT = \angle PKR$.

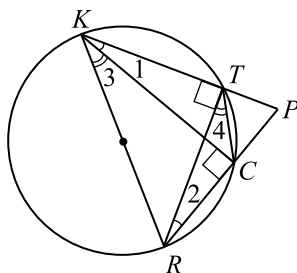


Рис. 112

У треугольников KRP и CTP угол P общий, $\angle PCT = \angle PKR$, поэтому треугольники KRP и CTP подобны.

26. В соответствии с условием рассмотрим рисунок 113.

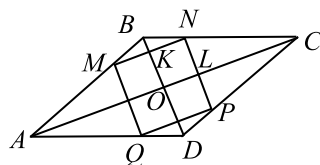


Рис. 113

Пусть AC – большая диагональ и $AC = d_1$, а $BD = d_2$, тогда по условию $d_2 = \frac{2}{5}d_1$, $d_1 = \frac{5}{2}d_2$. Обозначим через a сторону ромба $MNPQ$ и через α угол COD между диагоналями параллелограмма. Тогда α будет углом между соответствующими сторонами ромба.

Отсюда получаем, что $\frac{S_{MQPN}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2 \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha} = 2 \cdot \frac{a}{d_1} \cdot \frac{a}{d_2}$.

$\triangle AOB \sim \triangle MKB$ и $\triangle COB \sim \triangle NKB$, откуда $\frac{AO}{MK} = \frac{BO}{BK} = \frac{OC}{KN}$. Но $AO = OC$, поэтому $MK = KN = \frac{a}{2}$. Аналогично, $NL = LP = \frac{a}{2}$. Так как $BD \parallel NP$, то $OK = NL = \frac{a}{2}$.

Следовательно, из равенства $\frac{AO}{MK} = \frac{BO}{BK}$ вытекает, что $\frac{\frac{d_1}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{d_2}{2}}{\frac{d_2}{2} - \frac{a}{2}}$, $\frac{a}{d_1} = \frac{d_2 - a}{d_2}$,

$$\frac{a}{d_1} = 1 - \frac{a}{d_2}, \frac{a}{d_1} + \frac{a}{d_2} = 1.$$

Отсюда получаем: $\frac{a}{\frac{5}{2}d_2} + \frac{a}{d_2} = 1$, $\frac{2a}{5d_2} + \frac{a}{d_2} = 1$, $\frac{7a}{5d_2} = 1$, $\frac{a}{d_2} = \frac{5}{7}$;

$\frac{a}{d_1} + \frac{a}{\frac{2}{5}d_1} = 1$, $\frac{a}{d_1} + \frac{5a}{2d_1} = 1$, $\frac{7a}{2d_1} = 1$, $\frac{a}{d_1} = \frac{2}{7}$. Поэтому $\frac{S_{MQNP}}{S_{ABCD}} = 2 \cdot \frac{a}{d_1} \cdot \frac{a}{d_2} = 2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{49}$.

Ответ: $\frac{20}{49}$.

Решение варианта 39

21. 1. $p(a) = \frac{a(8-a)}{a-4}$.

2. $p(8-a) = \frac{(8-a)(8-(8-a))}{(8-a)-4} = \frac{a(8-a)}{(4-a)}$.

3. $\frac{p(a)}{p(8-a)} = \frac{a(8-a)}{a-4} : \frac{a(8-a)}{4-a} = \frac{a(8-a)(4-a)}{(a-4)a(8-a)} = -\frac{a-4}{a-4} = -1$.

Ответ: -1 .

22. Пусть концентрация первого раствора массой 40 кг равна $x\%$, а концентрация второго раствора — $y\%$.

В первом растворе содержится $\frac{x}{100} \cdot 40$ кг кислоты, во втором — $\frac{y}{100} \cdot 35$ кг кислоты.

Тогда концентрация смеси составит $\frac{\frac{x}{100} \cdot 40 + \frac{y}{100} \cdot 35}{75} \cdot 100\%$, что по условию равно 34%.

Получим уравнение $\frac{40}{75}x + \frac{35}{75}y = 25,5$, $\frac{8}{15}x + \frac{7}{15}y = 25,5$, $8x + 7y = 510$.

Если мы возьмём равные массы M (в килограммах) этих растворов, то полученная смесь будет иметь массу $2M$ и будет содержать $\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M$ кг кислоты. Значит, её кон-

центрация равна $\frac{\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M}{2M} \cdot 100\%$, что по условию равно 33%. Отсюда $\frac{x+y}{2} = 33$, $x+y = 66$.

Подставим $y = 66 - x$ в уравнение $8x + 7y = 510$, получим $8x + 7(66 - x) = 510$, $8x + 462 - 7x = 510$, $x = 48$.

Значит, в первом растворе содержится $\frac{48}{100} \cdot 40 = 19,2$ кг кислоты.

Ответ: 19,2.

23. Заметим, что функция $y = x^2 - 4|x| + 1$ — чётная ($y(-x) = (-x)^2 + 4|-x| + 1 = y(x)$). При $x \geq 0$ функция примет вид $y = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x - 2)^2 - 3$. Это фрагмент параболы с вершиной в точке $(2; -3)$, ветви направлены вверх. Часть графика при $x < 0$ получим, отразив график при $x > 0$ относительно оси Oy (см. рис. 114).

Из рисунка 114 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = x^2 - 4|x| + 1$ две, три или четыре общих точки (либо не имеет их вообще).

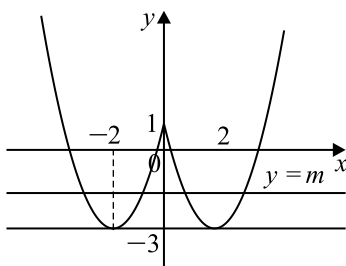


Рис. 114

Ответ: 4

24. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° (см. рис. 115), т.е. $\angle KPC = 180^\circ - \angle ABC$, поэтому $\angle APK = \angle ABC$. Это означает, что

$\triangle ABC \sim \triangle AKP$ по двум углам: $\angle A$ общий, $\angle APK = \angle ABC$. Тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC}$. По

условию $AC = 2BC$, тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{8}{2BC}$, откуда $KP = 4$.

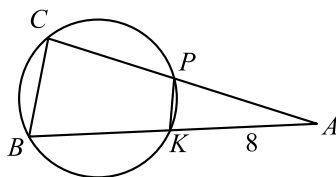


Рис. 115

Ответ: 4.

25. Обозначим точки касания общей касательной с окружностями M и N .

Треугольники AMC и BNC подобны, так как $\angle ACM = \angle BCN$ как вертикальные, а $\angle AMC = \angle BNC = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусом, проведённым к точке касания. Соответственные стороны подобных треугольников пропорциональны: $AC : CB = MA : BN = 3 : 5$. Значит, и диаметры этих окружностей относятся также как $3 : 5$.

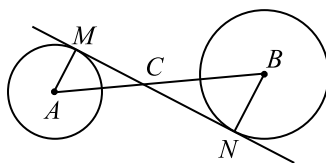


Рис. 116

26. Рассмотрим рисунок 117.

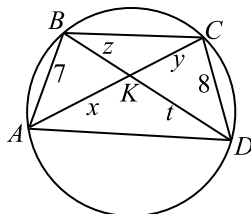


Рис. 117

Пусть угол AKB равен 60° , тогда угол BKC равен 120° . Обозначим $AK = x$, $KC = y$, $BK = z$, $KD = t$ (см. рис. 117) и через R радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$.

Заметим, что он совпадает с радиусом окружности, описанной около треугольника ABC .

По свойству вписанных углов получаем: $\angle KAB = \angle KDC$ и $\angle KBA = \angle KCD$.

Значит, $\triangle KAB \sim \triangle KDC$, откуда $\frac{z}{7} = \frac{y}{8}$, поэтому $z = \frac{7y}{8}$.

Пусть $BC = a$, тогда по теореме косинусов получаем:

$$a^2 = z^2 + y^2 - 2z \cdot y \cdot \cos \angle BKC = z^2 + y^2 - 2z \cdot y \cdot \cos 120^\circ.$$

Но $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, поэтому $a^2 = z^2 + y^2 + z \cdot y$,

$$a^2 = \left(\frac{7y}{8}\right)^2 + y^2 + \frac{7y}{8} \cdot y = \frac{(49 + 64 + 56) \cdot y^2}{64} = \frac{169y^2}{64}, a = \frac{13y}{8}.$$

Радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, совпадает с R . Воспользуемся известной формулой $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$, которую несложно доказать.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC, \text{ из теоремы синусов } \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R, \sin \angle ABC = \frac{AC}{2R}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}. \text{ Следовательно, } R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{7 \cdot (x + y) \cdot \frac{13y}{8}}{4S_{ABC}}.$$

$$\text{При этом } S_{ABC} = S_{ABK} + S_{BKC} = \frac{1}{2}x \cdot z \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}y \cdot z \cdot \sin 120^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ поэтому } S_{ABC} &= \frac{1}{2}x \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}z \cdot (x + y). \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } R = \frac{7 \cdot (x + y) \cdot \frac{13y}{8}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}z \cdot (x + y)} = \frac{\frac{91}{8}y}{\sqrt{3}z} = \frac{\frac{91}{8}y}{\sqrt{3} \cdot \frac{7y}{8}} = \frac{91}{7\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{13}{\sqrt{3}}$.

Решение варианта 40

$$21. 1. m(a) = \left(a + \frac{2}{a}\right)\left(2a + \frac{1}{a}\right).$$

$$2. m\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{\frac{1}{a}}\right)\left(\frac{2}{a} + a\right) = \left(\frac{1}{a} + 2a\right)\left(\frac{2}{a} + a\right).$$

$$3. \frac{m(a)}{m\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(2a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + 2a\right)\left(\frac{2}{a} + a\right)} = 1.$$

Ответ: 1.

22. Пусть концентрация первого раствора массой 80 кг равна $x\%$, а концентрация второго раствора — $y\%$.

В первом растворе содержится $\frac{x}{100} \cdot 80$ кг кислоты, во втором — $\frac{y}{100} \cdot 70$ кг кислоты. То-

гда концентрация составит $\frac{\frac{x}{100} \cdot 80 + \frac{y}{100} \cdot 70}{80 + 70} \cdot 100\%$, что по условию равно 76% . Получим

$$\text{уравнение } \frac{80}{150}x + \frac{70}{150}y = 76, \frac{8}{15}x + \frac{7}{15}y = 76, 8x + 7y = 1140.$$

Если мы возьмём равные массы M (в килограммах) этих растворов, то полученная смесь будет иметь массу $2M$ и будет содержать $\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M$ кг кислоты. Значит, её кон-

центрация равна $\frac{\frac{x}{100}M + \frac{y}{100}M}{2M} \cdot 100\%$, что по условию равно 75% . Отсюда $\frac{x+y}{2} = 75$, $x + y = 150$.

Подставим $y = 150 - x$ в уравнение $8x + 7y = 1140$, получим $8x + 7(150 - x) = 1140$, $8x + 1050 - 7x = 1140$, $x = 90$.

Ответ: 72.

23. При $x \geq 0$ исходная функция имеет вид $y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(2; 4)$, ветви которой направлены вверх.

При $x < 0$ исходная функция имеет вид $y = x^2 + 8x + 8 = (x + 4)^2 - 8$ — это фрагмент параболы с вершиной в точке $(-4; -8)$, ветви которой направлены вверх.

Ясно, что $y(0) = 8$.

Из рисунка 118 видно, что горизонтальная прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = x^2 - 6|x| + 2x + 8$ одну общую точку при $m = -8$, две общие точки — при $-8 < m < 4$ и $m > 8$, три — при $m = 4$ и $m = 8$.

Таким образом, искомые значения параметра — это $m \in [-8; 4] \cup [8; +\infty)$.

Ответ: $[-8; 4] \cup [8; +\infty)$

24. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° (см. рис. 119), т.е. $\angle KPC = 180^\circ - \angle ABC$, поэтому $\angle APK = \angle ABC$. Это означает, что

$\triangle ABC \sim \triangle AKP$ по двум углам: $\angle A$ общий, $\angle APK = \angle ABC$. Тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC}$. По

условию $AC = 3BC$, тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{9}{3BC}$, откуда $KP = 3$.

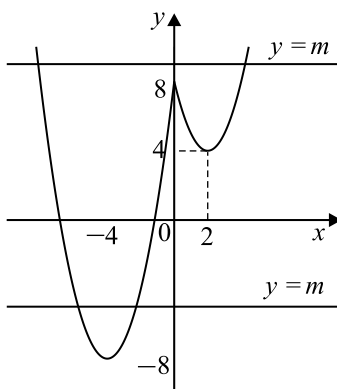


Рис. 118

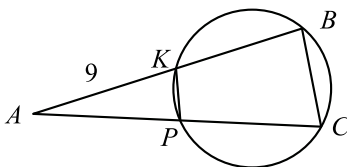


Рис. 119

Ответ: 3.

25. Обозначим точки касания общей касательной с окружностями D и E .

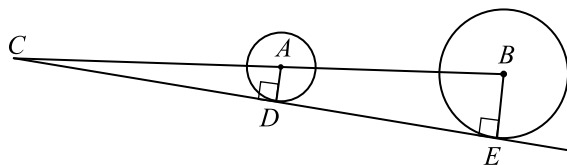


Рис. 120

Треугольники ADC и BEC подобны, так как $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусом, проведённым к точке касания, а $\angle ACD$ общий. $CB = CA + AB$, значит, $AC : CB = 6 : 11$. Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональны: $AC : CB = DA : BE = 6 : 11$.

Так как AD и BE — радиусы данных окружностей, то утверждение доказано.

26. Рассмотрим рисунок 121.

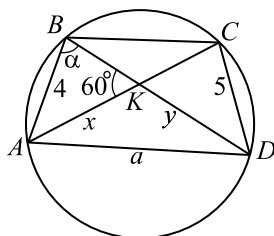


Рис. 121

Пусть R — радиус описанной окружности около $ABCD$, значит, R — радиус описанной окружности около треугольника ABC , $AK = x$, $KD = y$, $AD = a$, $\angle ABD = \alpha$. $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$, так как они опираются на одну и ту же дугу окружности.

$$\text{Из } \triangle ABK: \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin \alpha}; x = \frac{4 \sin \alpha}{\sin 60^\circ}, x = \frac{8 \sin \alpha}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle KCD: \frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin \alpha}; y = \frac{5 \sin \alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{10 \sin \alpha}{\sqrt{3}}.$$

$$\angle AKD = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Из } \triangle AKD: a^2 = AK^2 + KD^2 - 2AK \cdot KD \cdot \cos 120^\circ; \text{ так как } \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\text{то } a^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos 60^\circ; a^2 = \frac{64 \sin^2 \alpha}{3} + \frac{100 \sin^2 \alpha}{3} + \frac{160 \sin^2 \alpha}{3} \cdot \frac{1}{2}, a^2 = \frac{244 \sin^2 \alpha}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle ABD: \frac{a}{\sin \alpha} = 2R, a = 2R \sin \alpha, a^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha. \frac{244 \sin^2 \alpha}{3} = 4R^2 \sin^2 \alpha;$$

$$4R^2 = \frac{244}{3}, R^2 = \frac{61}{3}.$$

$$R = \sqrt{\frac{61}{3}} = \frac{\sqrt{183}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{183}}{3}.$$